Geolab, laboratorio de geometría

Elena de Oteyza de Oteyza　　Carlos Hernández Garciadiego

Diciembre 2013

Contents

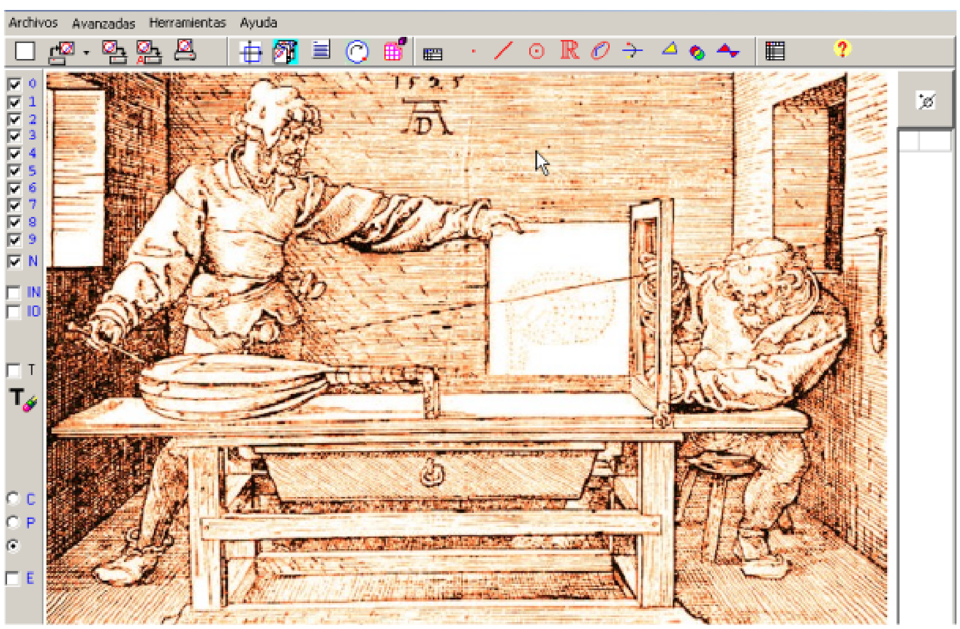
1 Instructivo general

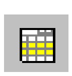
En este documento establecemos los términos generales que utilizaremos a lo largo de todas las prácticas.

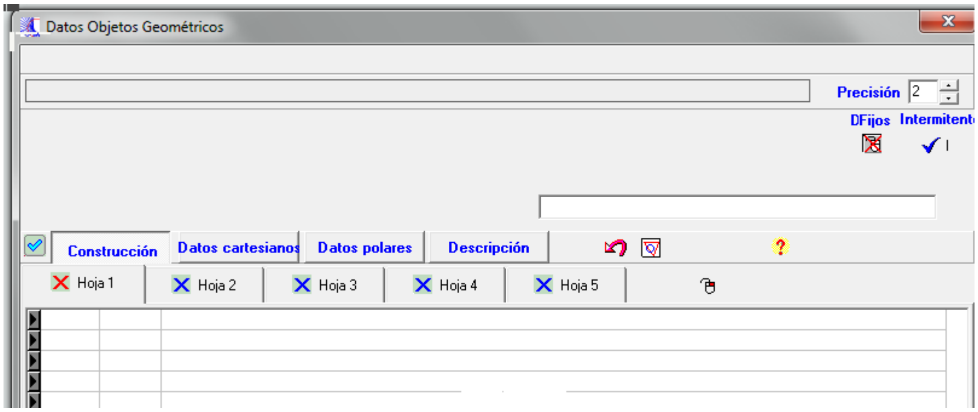
Hacer *click* significa colocar el cursor en el icono que se indica y oprimir el *botón izquierdo* del ratón.

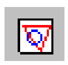
Al abrir el programa Geolab aparece la ventana,

Haz click en  y aparece la pantalla gráfica,

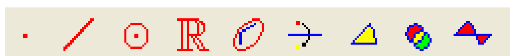


y haciendo click en  vamos a la pantalla de datos.

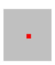
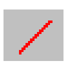
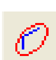
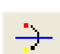
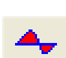


Haciendo click en  aparece nuevamente la pantalla gráfica.

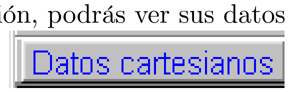
En la pantalla gráfica aparecen los íconos



que son los constructores. Haciendo click sobre cada uno de ellos se abre un menú, el cual nos permitirá construir distintos objetos.

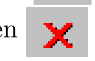
-  Define puntos
-  Define rectas
-  Define círculos
-  Define escalares
-  Define cónicas
-  Define transformaciones
-  Define arcos
-  Define condiciones
-  Define funciones

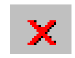
Cuando ya tengas hecha una construcción, podrás ver sus datos cartesianos, para ello:

En la **pantalla de datos** haz click en 

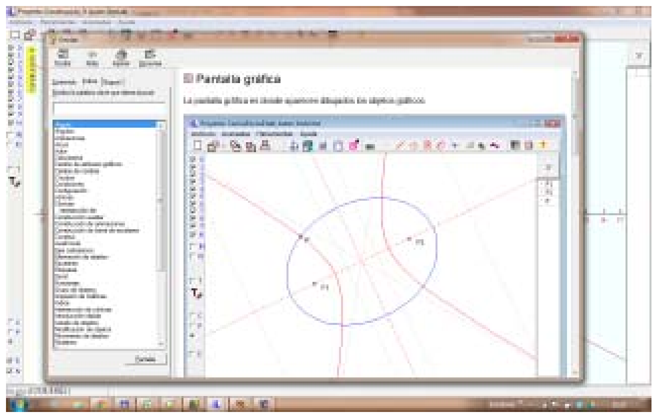
datos cartesianos, ahora podrás ver las coordenadas de los puntos, ecuaciones y demás datos. Aquí también puedes hacer cambios, para ello deberás colocarte en el renglón del dato a modificar:

- En la parte superior aparecen las ventanas en las que puedes cambiar los datos. Haz click en cualquier otro renglón para registrar los cambios.

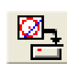
- Si quieres borrar este elemento, coloca el cursor en el renglón donde está definido el elemento y haz click en el botón derecho, el renglón se pinta de amarillo, haz click en  *borrar*. Si ya está el renglón en amarillo y no es ese el elemento que deseas eliminar haz click en 

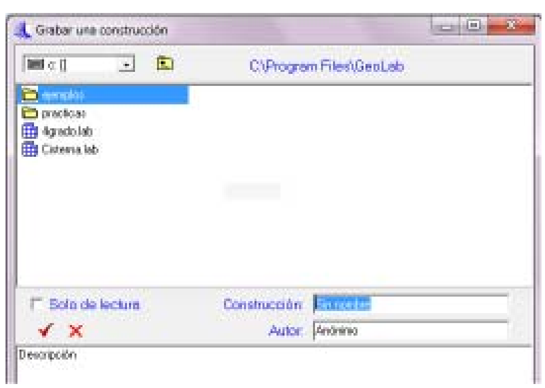
- Si al estar construyendo un objeto cometes un error, haz click en  e inicia nuevamente la construcción de dicho elemento.

- **Ayuda de Geolab**. En la mayor parte de las pantallas de Geolab hay un icono de ayuda . Al oprimirlo aparece una ventana de ayuda que explica lo referente a esa pantalla.

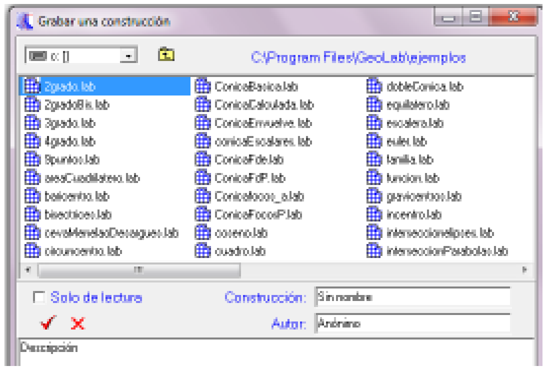


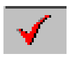
Si estás a la mitad de una construcción y no sabes qué hacer, oprime este ícono y aparecerá la ayuda de la construcción que estás haciendo,

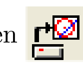
Para guardar una construcción: Haz click en  *guardar* para que aparezca la pantalla *Guardar una construcción*:

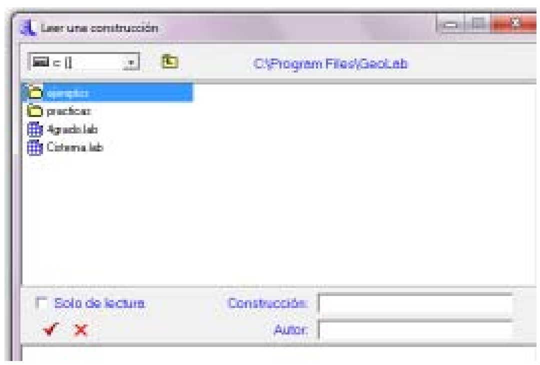


Abre la carpeta *Ejemplos*

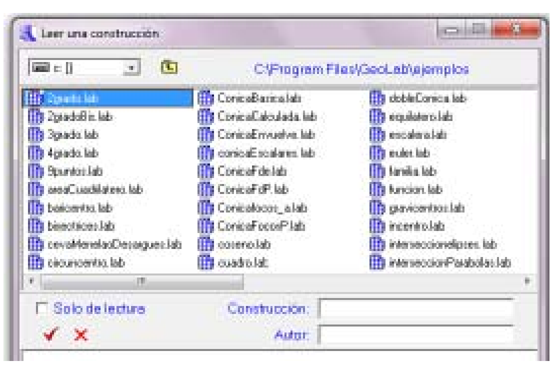


En la ventana que dice **Construcción** escribe el nombre que quieras asignarle y después haz click en 

Para abrir un archivo con una construcción guardada anteriormente: Haz click en  *abrir* para que aparezca la pantalla *Leer una construcción*:



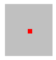
Da click en la carpeta *Ejemplos* y aparece la ventana

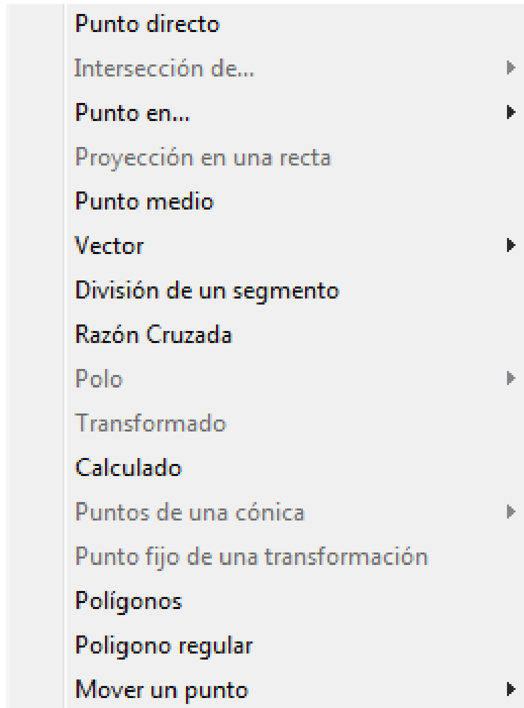


Da doble click sobre la construcción que desees abrir.

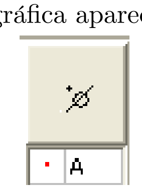
2 Puntos

1. **Construcción en la pantalla gráfica**

   - Haz click en el icono  *Define puntos*, aparecerá el menú

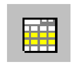


   - Elige punto directo. El programa le asigna el nombre A, ahora haz click en cualquier lugar de la pantalla y ahí aparecerá el punto. Si quieres poner más puntos directos sólo haz click en otros lugares de la pantalla gráfica (el programa sólo espera un segundo), en caso contrario tendrás que volver a hacer click en el icono de *Define puntos*.
   - Hay dos maneras de mover el punto A en la pantalla gráfica:
     - Coloca el cursor sobre el punto y oprimiendo sin soltar el botón izquierdo, puedes arrastrarlo al lugar que desees.
     - En el extremo superior derecho de la pantalla gráfica aparece

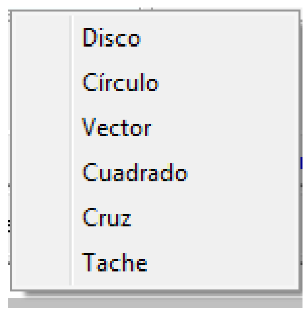


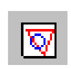
       haz click en A, ahora lo puedes mover arrastrándolo con el ratón.
     - También puedes colocar el cursor sobre el punto A y dar click en el botón derecho del ratón, entonces aparece una ventana con las coordenadas de A. Si haces click en el renglón donde está el valor de x, éste aparece en la parte de abajo y ahí puedes cambiarlo. Para cambiar el valor de y haz click donde aparece $y =$
   - Para mover el punto A en la pantalla de datos:

- Puedes cambiar las coordenadas del punto A haciendo click sobre la imagen del teclado que aparece en el renglón donde está definido A y aparece una ventana igual que en la pantalla gráfica.

- En la barra superior, haz click en  *Datos analíticos*, para volver a la **pantalla de datos analíticos**.
- En la pantalla de datos analíticos podemos observar

Los datos que vemos aquí significa que el punto se encuentra en el nivel 1 tiene un ancho de 3, no deja traza, es visible, es de color negro y la última casilla nos indica que están dibujados como círculos negros. Todas estas características las podemos cambiar, por ejemplo dando un click sobre la casilla negra que está debajo de Color podemos cambiar el color de los puntos. Si damos click donde se encuentra el círculo aparece

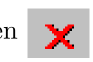


En la barra de herramientas haz click en  *Pantalla gráfica*, ello te llevará a la **pantalla gráfica** en la que puedes ver el punto.
En la pantalla gráfica en el margen izquierdo abajo aparecen los botones

Si quieres ver los ejes del plano cartesiano haz click en E, entonces aparece un nuevo botón N, si tiene paloma entonces aparecen los números en las marcas de los ejes, puedes hacer un click en N para que no aparezcan los números en los ejes.

Si además quieres ver una cuadrícula debes hacer click en C. Si vas a usar coordenadas polares haz click en P. Si no aparece la palomita en E entonces no aparecen los ejes cartesianos en la pantalla.

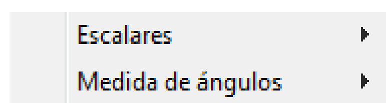
- Si quieres borrar este elemento, en la pantalla de datos, coloca el cursor en el renglón y haz click en el botón derecho, el renglón se pinta de amarillo, haz click en  *Borrar*, aparece la pantalla

haz nuevamente click en  y se borrará el objeto. Si haces click en  se cancela la operación.
Si ya está el renglón en amarillo y no es ese el elemento que deseas eliminar haz click en  que aparece en la parte superior de la pantalla.

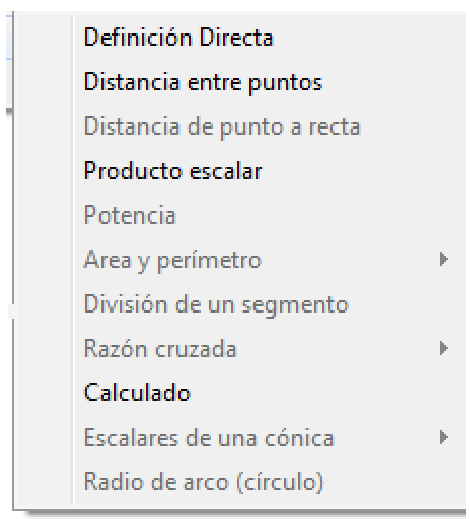
- Si al estar construyendo un objeto cometes un error, haz click en  e inicia nuevamente la construcción de dicho elemento.

2.1 Segmentos

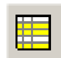
1. **Distancia entre dos puntos**.

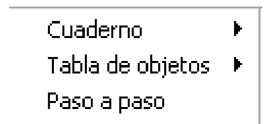
   - Construye dos puntos directos $A\,(-5,6)\,,\ B\,(1,3)\,.$
   - Ahora utiliza el constructor de escalares  y en el menú 

     elige *Escalares* y aparece el submenú

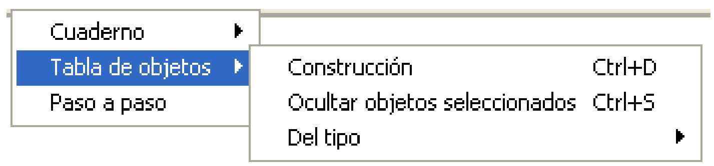


elige *Distancia entre puntos.* Llama d a este escalar. Da doble click en A y en B. O bien, en la ventana que apareció en la parte de abajo a la izquierda puedes del doble click sobre el renglón de A y sobre el de B.

- En la pantalla de datos analíticos coloca el cursor en el renglón del escalar d y oprime el botón derecho del ratón. Oprime el icono  *Objetos para observar.* en la parte superior de la pantalla a la derecha. Ve a la pantalla gráfica y verás que aparecen en la esquina izquierda de la pantalla d y su valor.
- Arrastra cualquiera de los puntos y observa cómo cambia el valor de d en la ventana.
- Si quieres quitar de la pantalla gráfica los datos para observar, haz click en el icono *Observación de datos*  y verás que aparece un menú

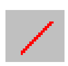


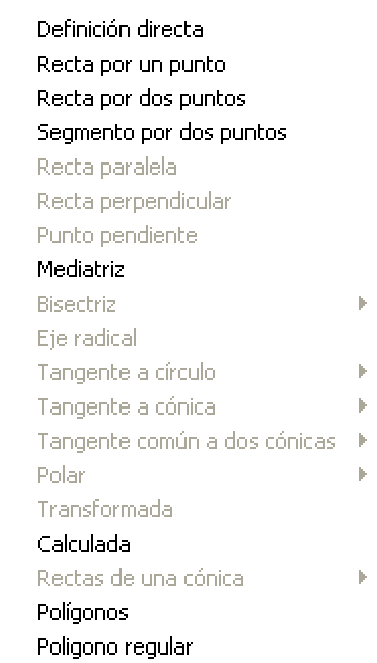
haz click en *Tabla de objetos* y aparece la ventana



haz click sobre el letrero *Ocultar objetos seleccionados.*

2. **Dibujar un segmento**

- Construye dos *Puntos directos* A, B.
- En el constructor  *Define rectas,* aparece el menú

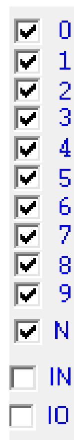


elige *Segmento entre dos puntos*, el programa lo llama a al segmento, haz doble click en A y B.

- Ve a la pantalla analítica, da click sobre el renglón donde está definido el segmento y observa que el panel para cambiar los elementos gráficos tiene dos partes.

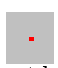
En la segunda parte, dónde dice Visible hay un tache abajo. Da click sobre el tache para que se cambie por una paloma azul. Ve a la pantalla gráfica y observa que se pintó la prolongación del segmento en punteado negro.

- A la izquierda de la pantalla gráfica aparecen



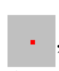
Si apagamos el nivel 2, desaparece el segmento, si apagamos el nivel 7, desaparece la prolongación del segmento.

3. **Punto medio de un segmento**.

   - Construye los *Puntos directos* $A\,(-3,-5)$, $B\,(9,3)$.
   - Utiliza el icono  y elige *Punto medio*. Llama P a dicho punto, en la parte superior izquierda de la pantalla está la palabra Nombre seguida de una ventana, reemplaza la letra que aparece por P. En la pantalla de datos analíticos puedes ver inmediatamente el valor de sus coordenadas. Si oprimes el botón de *Datos cartesianos*, puedes ver las coordenadas de todos los puntos construidos.

4. **División de un segmento**.

   ¿En qué punto debe colocarse el soporte para que, colocando en una tabla de 5 metros de largo, un peso de 6 kilogramos en el lado izquierdo y otro de 15 kilogramos en el lado derecho, ésta permanezca equilibrada?

   - Construye los puntos $P\,(0,0)$ y $Q\,(5,0)$.
   - Construye también los escalares $p=6$ y $q=15$ que representan los pesos en los puntos P y Q respectivamente. Construye el escalar calculado $r=q/p$.
   - Finalmente, haz click en el icono , elige *División de un segmento* y construye el punto R que divide al segmento PQ en la razón r. Modifica los valores de p y q, y observa cómo cambia la posición de R.

5. **Leyes de los signos**

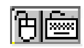
- Define un escalar directo a con el valor 2.
- Define un escalar directo b con el valor 3.
- Construye un punto calculado A con coordenadas $(a, 0)$.
- Construye un punto calculado B con coordenadas $(0, b)$.
- Define un punto directo C y cambiamos las coordenadas a $(0, 1)$.
- Trazamos el segmento c que une A con C.
- Trazamos una recta paralela d al segmento c que pase por B.
- Trazamos la recta calculada $A = 0, B = 1$ y $C = 0$.
- Encuentra el punto de intersección D de las rectas d y e.
- Ahora cambia los valores de a y de b para verificar las leyes de los signos.

3 Rectas

1. **Recta directa**

   - Utiliza el constructor recta y elige en el menú *Recta directa*. Llámala a y da click en cualquier sitio.
   - Haz click sobre la recta para que aparezca la ventana de *Objeto Calculado*. Ahí puedes cambiar la ecuación de la recta modificando los datos A, B y C que son los coeficientes de la recta $Ax + By + C = 0$.

     También la puedes mover de cualquiera de las dos maneras siguientes:

     – Si estás en la pantalla de datos haz click sobre el ratón  que está a la izquierda en el renglón de ℓ, aparece la pantalla gráfica coloca el cursor sobre la recta y arrástrala sin soltar el botón izquierdo del ratón.

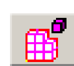
     – Si estás en la pantalla gráfica haz click sobre la recta y arrastra la recta con el ratón. Si hay varias rectas puedes seleccionar la recta que quieres mover en la columna de la derecha y después arrastrarla con el ratón.

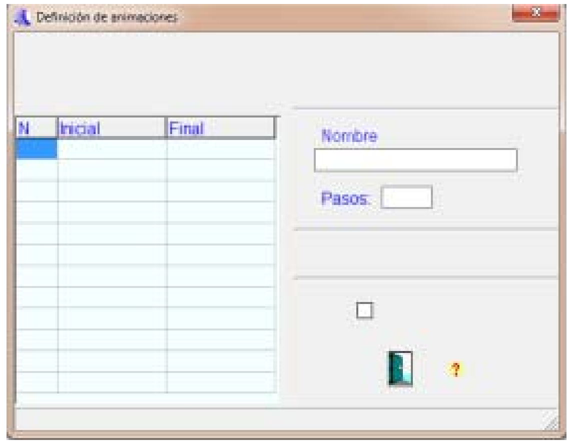
2. **Recta Punto-Pendiente**.

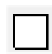
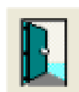
   - Construye el punto $P\,(2, 3)$ y el escalar $m = 4$.
   - Utiliza el constructor *Recta* elige del menú *Punto-pendiente* y construye la recta, a, que pasa por P y tiene pendiente m.
   - En la pantalla de datos analíticos oprime el botón de datos cartesianos para ver los valores de los objetos construidos. Observa la ecuación de la recta. posiblemente no es la que esperabas. Si haces el ejercicio a mano, obtendrás $4x - y - 5 = 0$. Recuerda que si multiplicas la ecuación de una recta por una constante, obtienes la misma recta. De todas las ecuaciones en la forma $Ax + By + C = 0$ que representan una recta, Geolab elige aquella en la que $A^2 + B^2 = 1$, es decir, normalizada. Para normalizar la ecuación de una recta, hay que dividir todos los coeficientes entre $\sqrt{A^2 + B^2}$, en el ejemplo, si dividimos los coeficientes entre $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, obtenemos $0.970\,143x - 0.242\,536y - 1.\,212\,68 = 0$, que es el resultado que da Geolab.
   - En la pantalla gráfica arrastra el punto P y observa que la recta lo persigue pero sigue teniendo la misma inclinación.

3. **Animación**.

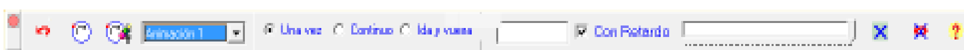
   Generaremos la familia de rectas que pasa por un punto P variando la pendiente de ellas.

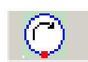
   - Usa la construcción de la recta del inciso anterior.
   - Colócate en el renglón donde está m. Haz click en  *Otras acciones* y elige en el menú *Animación*. Aparecerá la ventana



Haz un click en el cuadro blanco , que aparece en la parte inferior izquierda de la ventana, para definir una animación nueva. Haz click debajo de **N** en la parte azul y escribe m, debajo de **Inicial** haz click y escribe -10 y debajo de **Final** haz click y escribe 10. Da un click en  y ahora un click en la puerta de salida  que apareció en la pantalla.

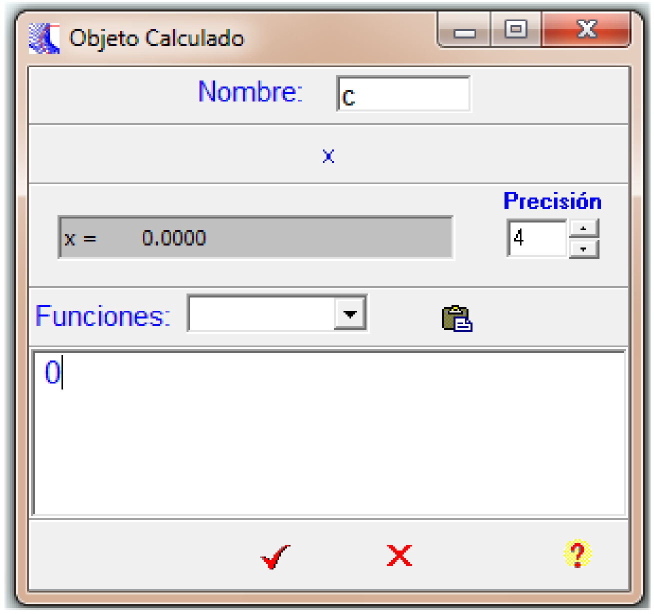
- En la pantalla de datos, pon el cursor en el renglón de la recta a y haz un click en Traza.
- En la pantalla gráfica prende el selector de traza  y haz un click en  y elige animación en el menú, observa que apareció la barra en la parte inferior de la pantalla.



Para ejecutar la animación haz un click en  de la barra . Observa el abanico de rectas que pasan por P.

4. **Pendiente**.

- En una recta $Ax + By + C = 0$, la pendiente se obtiene despejando y y fijándose en el coeficiente de x, así, $m = -\dfrac{A}{B}$.
- Utiliza la construcción del inciso 1. Geolab puede utilizar los elementos de un objeto para construir otros.
- Haz click en , elige *Calculado*.



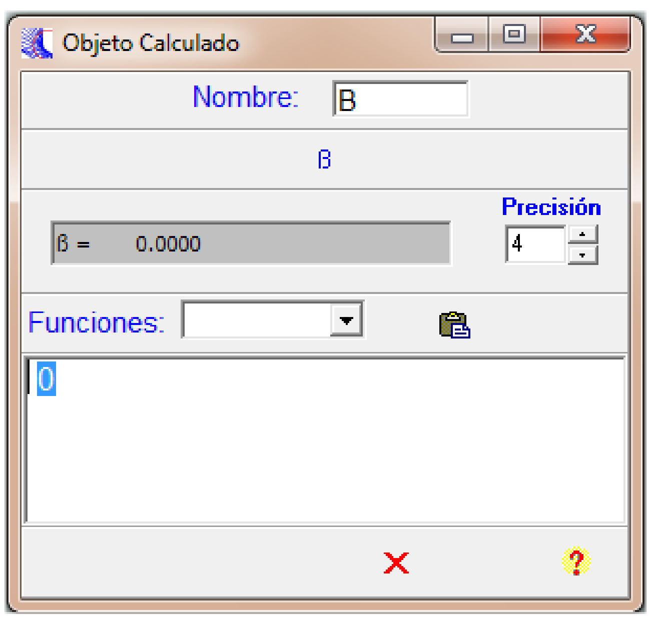
Escribe $A1$ en **Nombre** y $a.A$ en la ventana inferior.(en lugar del 0) Observa en la pantalla de datos cartesianos que el coeficiente de x en la recta a coincide con el que acabas de calcular. Ahora define $B1$ y $C1$ calculando como antes $a.B$, $a.C$. Observa que $B1$ coincide con el coeficiente de y y $C1$ es el término independiente, de la ecuación de la recta.

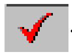
- Construye el escalar calculado $n = -A1/B1$ y comprueba que $n = m$.

5. **Ángulo**.

   Usa la construcción del ejercicio anterior. El ángulo que forma una recta con el eje X es el ángulo cuya tangente es la pendiente de la recta.

   - Haz click en , elige *Medida de ángulo* y en el submenú *Calculado*. Aparece una ventana muy similar a la anterior.



Escribe g en Nombre y haz click en la flecha que aparece al lado derecho de Funciones. Elige haciendo click en la fórmula $atan(x)$, haz click sobre el símbolo  *Pegar función.* Ahora en la ventana donde apareció $atan(x)$ cambia la x por m Observa que en la ventana $x =$ aparece un número. Haz click en .

- Selecciona el renglón g y en el menú de **Herramientas**

elige *Unidades angulares* y ahí puedes escoger la manera en que quieres que te dé el valor del ángulo: radianes, grados:minutos:segundos o grados con decimales.

6. **Recta por dos puntos**.

Construye los puntos $A(4,-1)$ y $B(8,3)$ y la recta, a, que pasa ellos. Observa en la pantalla gráfica que los puntos A y B aparecen en la lista que está a la derecha. Esto es porque fueron puntos construidos directamente. Puedes elegir cualquiera de ellos y arrastrarlo con el ratón. Observa que la recta lo persigue. Ve también cómo cambia su ecuación.

7. **Intersección de dos rectas**.

Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

- Construye otros dos puntos $C\,(2,3)\,,\ D\,(-2,1)$. y la recta, b, que pasa por ellos.
- En el menú de construcción de puntos elige *Intersección de* y del submenú *Intersección de rectas* y construye la intersección, E, de las rectas a y b, observa el resultado.
- Cambia ahora los valores de las coordenadas de C y D haciendo $C\,(1,4)$ y $D\,(-3,0)$ Observa cómo son las rectas. Si en la pantalla de datos analíticos oprimes el botón datos cartesianos, en el renglón del punto E dice *No existe el objeto.* Ahora pon los valores $C(4,-1)$ y $D(8,3)$, en este caso, las dos rectas coinciden y nuevamente el punto E dice *no existe el objeto.*

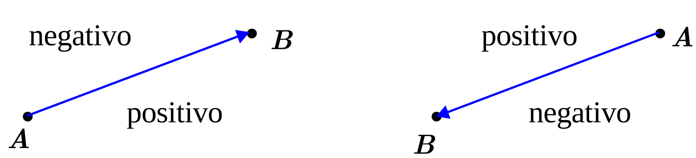
8. **Rectas perpendiculares y paralelas**.

Utiliza la construcción del ejercicio 6.

- Construye un punto arbitrario C.
- Ahora construye la recta, b, perpendicular a a que pasa por C. Observa los coeficientes de las rectas c y a, ¿qué relación hay entre ellos?
- Construye una recta, c, paralela a a que pasa por C. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de c y a?

9. **Distancia de un punto a una recta**.

- Construye una recta a, que pase por $A(4,-1)$ y $B(8,3)$. (al construirla, elige los puntos en ese orden).
- Construye un punto arbitrario C y la distancia d, del punto C a la recta a. Observa que $d<0$ cuando C está arriba de la recta y $d>0$ cuando está debajo. La razón es la siguiente: La ecuación de la recta a es $0.7x-0.7y-3.5=0$, como el coeficiente de y no es positivo, la ecuación *no está orientada en la forma estándar.* Si Geolab construye una recta por dos puntos, la orienta como si fuera un río, al ir de A a B, el lado izquierdo es el negativo y el derecho es el positivo.



- Construye otra recta b que pase por B y A (en ese orden) Observa que las ecuación de b es igual a la de a multiplicando todos los coeficientes por -1. La ecuación de b sí está orientada en la forma estándar. Construye la distancia e, del punto C a la recta b y observa que ahora e es positiva cuando C está arriba de la recta.

10. **Bisectriz de un ángulo**.

- Construye los puntos $A\,(4,-1)$, $B\,(8,3)$ y $C\,(3,6)$.
- Construye la recta a de A a B y la recta b de A a C (los puntos en ese orden). Píntalas de color verde.
- Construye un punto arbitrario D.
- Construye las distancias, $d1$ y $d2$, de D a a y b respectivamente. Las rectas dividen al plano en cuatro regiones.
- Mueve el punto D a cada una de las regiones y observa que los números $d1$ y $d2$ son ambos positivos en una de ellas, ambos negativos en la región que está opuesta por el vértice a la anterior y tienen signos opuestos en las otras dos regiones.
- Coloca el punto D en una región donde $d1$ y $d2$ tienen el mismo signo.
- Construye la bisectriz $\ell 1$ de las rectas a y b, eligiendo, del menú de recta, *Bisectriz* y la opción *En la misma región que un punto* del submenú. Observa que esta bisectriz pasa por las regiones donde $d1$ y $d2$ tienen el mismo signo.
- Construye la bisectriz $\ell 2$ de las rectas a y b, eligiendo *Bisectriz* del menú de recta y la opción *En la otra región que un punto* del submenú. Píntala de rojo. ¿Por qué regiones pasa?
- Ahora cambia el punto D a una región en donde $d1$ y $d2$ tienen signos opuestos. Observa como las rectas $\ell 1$ y $\ell 2$ se intercambiaron.
- Las otras dos opciones del menú de *Bisectriz* las veremos en la construcción de triángulos.

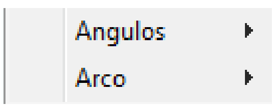
4 Construcción de polígonos

4.1 Construcción de polígonos regulares

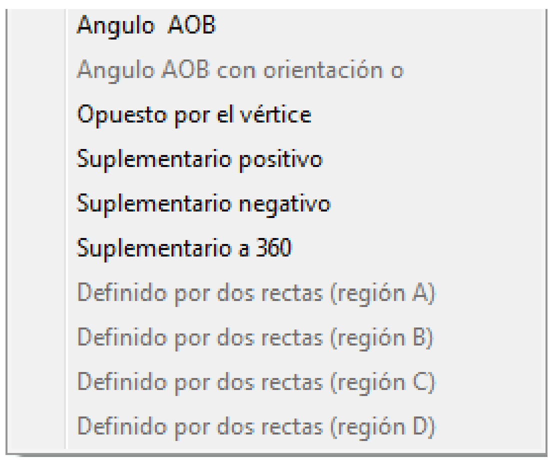
- Construye dos puntos directos A, B.
- En el constructor *Define puntos*, elige del menú *Polígono regular.* En la pantalla aparece la ventana

en donde dice **Número de vértices** ponemos 5 y damos click en entonces en la pantalla gráfica aparece un pentágono regular.

- Vamos a iluminar uno de los ángulos interiores del pentágono. Damos click en el ícono y aparece el menú

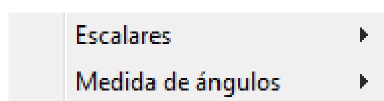


elegimos *Ángulos* y del submenú

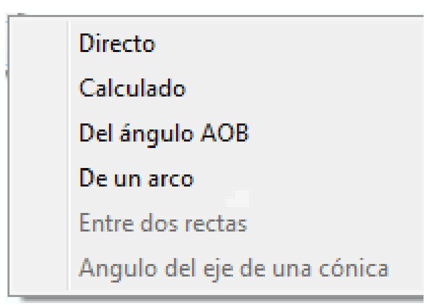


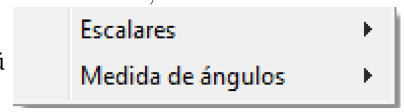
elegimos *Ángulo AOB,* damos click en $B1BB4$. En la pantalla de datos analíticos observamos que en el renglón donde está el ángulo dice ángulo = 108.00°.

- Damos click en *Define escalares* y del menú

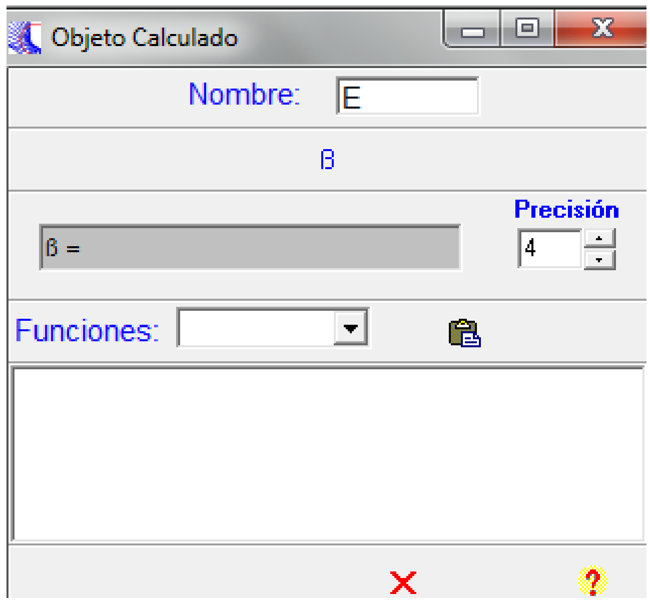


elegimos *Medida de ángulos* y aparece el submenú



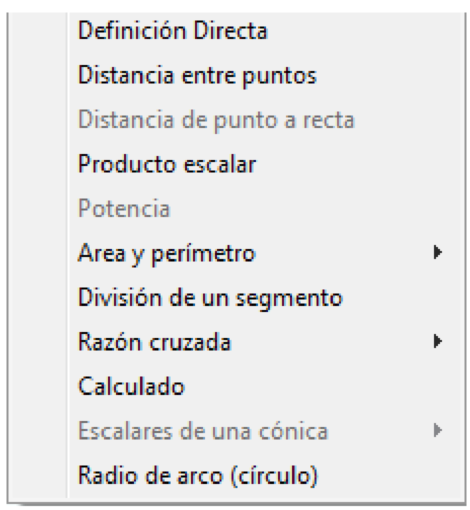
elegimos *Del ángulo AOB* y calculamos la medida del ángulo $B1BB4$. Como el polígono que construimos es regular, entonces todos sus ángulos interiores son iguales. Para saber la suma de las medidas de los ángulos interiores del pentágono, vamos a la pantalla de datos analíticos, observamos cómo se llama la medida (D) que acabamos de calcular y en , del menú 

elegimos *Medida de ángulos* y del submenú *Calculado*

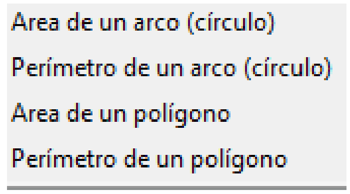


En la ventana de abajo ponemos $D * 5$ y después damos click en la paloma. Vamos a la pantalla de datos analíticos y vemos que en el último renglón de la construcción dice 540°.

- En el constructor  elegimos *Escalares* y del submenú

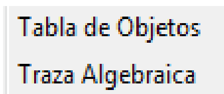


elegimos *Área y perímetro*, después aparece otro menú



escogemos *Área de un polígono,* en la parte inferior izquierda, aparece una ventana dónde está definido el polígono y damos click sobre él. Análogamente calculamos el perímetro del polígono.

- ¿Es el área del pentágono, siempre mayor que el perímetro?

  En la pantalla de datos analíticos marcamos de amarillo los renglones dónde están definidos el área y el perímetro. En la barra de herramientas, oprime el icono  *Objetos para observar* y aparece la ventana 

elegimos *Tabla de objetos,* en la pantalla gráfica en la esquina superior izquierda aparecen los datos que marcaste. Ahora mueve el pentágono por el vértice B y observa cómo cambian el área y el perímetro. Ya puedes contestar la pregunta.

4.2 Construcción de triángulos

1. **Triángulo equilátero**
   - Construye los puntos directos A, B.
   - Dibuja el segmento entre los puntos A y B.
   - Encuentra la distancia d entre A y B.
   - Traza el círculo C con centro en A y radio d.
   - Traza el círculo D con centro en B y radio d.
   - Encuentra el punto de intersección E de los dos círculos.
   - Encuentra el punto de intersección F de los dos círculos, del otro lado del punto E.
   - Traza los segmentos AE y BE.
   - Encuentra las distancias de A a E y de B a E.
   - Ve a la pantalla de datos y observa cómo son las medidas de los lados del triángulo.

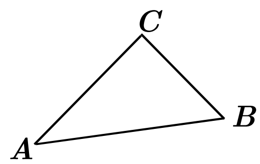
2. **Triángulo isósceles**
   - Construye los puntos directos A, B.
   - Dibuja el segmento a entre los puntos A y B.
   - Traza la mediatriz b del segmento AB.
   - En el constructor de puntos, elige *Punto en* y después *Punto en recta,* y da click sobre la mediatriz.
   - Traza un segmento de A a C y otro de B a C.
   - Calcula las distancias AC y BC.¿Cómo son los valores obtenidos?

3. **Triángulo rectángulo**
   - Define dos puntos directos A y C.
   - Construye el segmento b que une a los puntos C y A.

- Traza la recta a perpendicular a la recta b que pasa por C.
- Encuentra un punto B en la recta a.

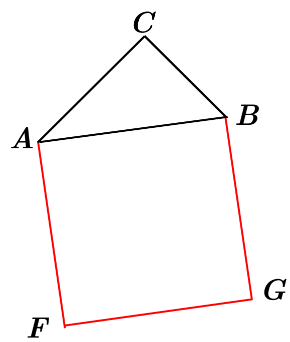
4. **Teorema de Pitágoras**

   Si ABC es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

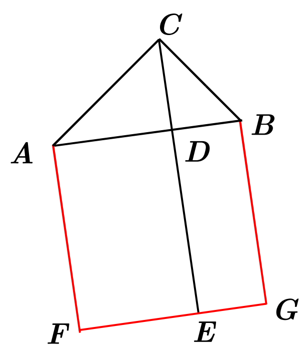


   (a) *Primera demostración.*

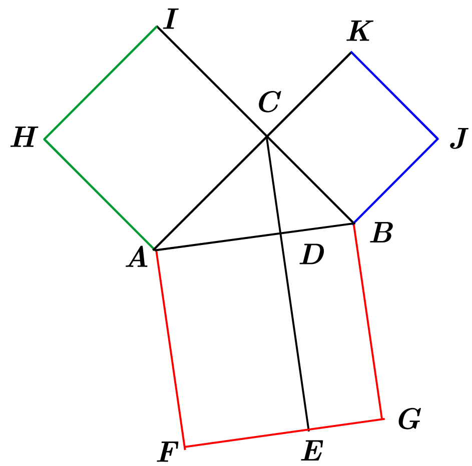
   El cuadrado $AFGB$ tiene por lado la hipotenusa del triángulo ABC.



   Trazamos la perpendicular a AB que pasa por C.
   Se forman dos rectángulos: $AFED$ y $DEGB$.

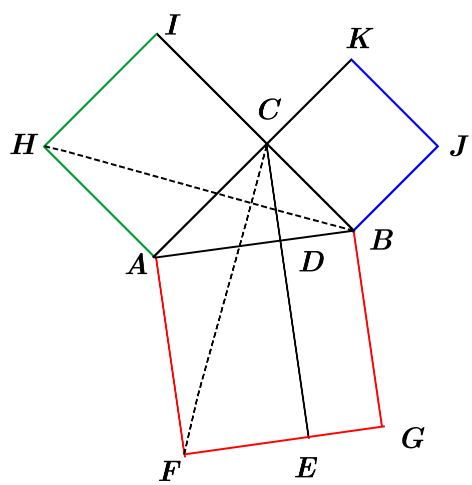


   Trazamos el cuadrado $ACIH$ tiene por lado el cateto AC y el cuadrado $BJKC$ tiene por lado el cateto BC.



Probaremos que el área del rectángulo $AFED$ es igual al área del cuadrado $ACIH$ y el área del rectángulo $DEGB$ es igual al área del cuadrado $CBJK$.

Trazamos las rectas BH y CF, formándose así los triángulos HAB y CAF.



Veamos ahora cómo son los triángulos HAB y CAF.

Por construcción los lados AC y HA son iguales, por ser los lados del cuadrado $ACIH$.

También los lados AF y AB son iguales, por ser los lados del cuadrado $AFGB$.

Analizamos el ángulo CAF que es el formado por los lados CA y AF y el ángulo HAB que es el formado por los lados HA y AB.

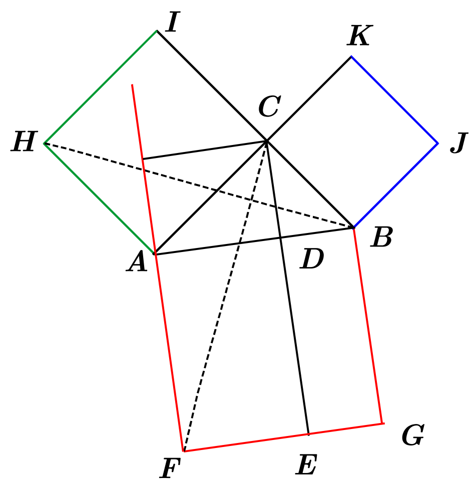
$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle CAF = \measuredangle CAB + \text{un ángulo recto}\\ \measuredangle HAB = \measuredangle CAB + \text{un ángulo recto}\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle CAF = \measuredangle HAB$$

De donde los triángulos HAB y CAF son congruentes.

El área del rectángulo $AFED$ es $AF \cdot FE$.

El área del triángulo CAF es

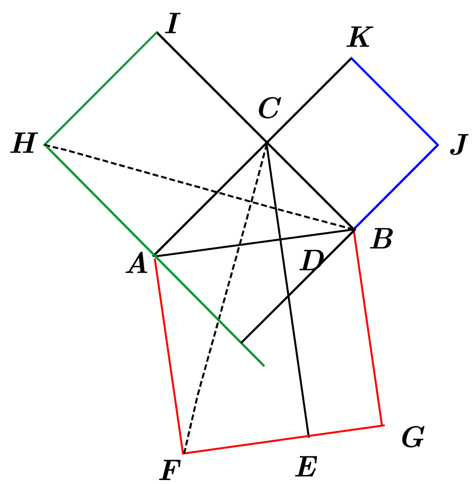
$$\frac{1}{2}\,(\text{base})\,(\text{altura})$$



si consideramos AF como la base, entonces la altura es la distancia de la perpendicular a la prolongación del lado AF y que pasa por C, pero esa distancia es FE así

$$\text{área del triángulo } CAF = \frac{1}{2}\text{área del rectángulo } AFED.$$

Ahora consideramos el triángulo HAB.



Si tomamos como base el lado HA, la altura es la distancia de la perpendicular a la prolongación del lado HA y que pasa por B, pero esa distancia es HI así

$$\text{área del triángulo } HAB = \frac{1}{2}\text{área del cuadrado } ACIH.$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{área del rectángulo } AFED &= \text{área del cuadrado } ACIH \\ AF \cdot FE &= HI \cdot HI. \end{aligned}$$

Ejercicio Probar que el área del rectángulo $DEGB$ es igual al área del cuadrado $CBKJ$.
De donde

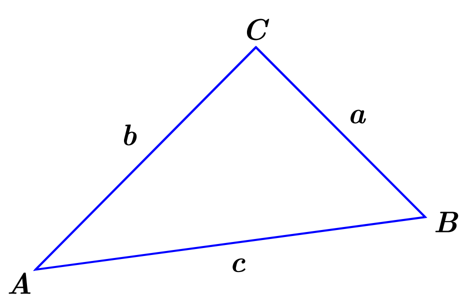
$$\begin{aligned} \text{área del rectángulo } AFGB &= \text{área del rectángulo } AFED + \text{área del rectángulo } DEGB \\ &= \text{área del cuadrado } ACIH + \text{área del cuadrado } CBKJ. \end{aligned}$$

Construcción:

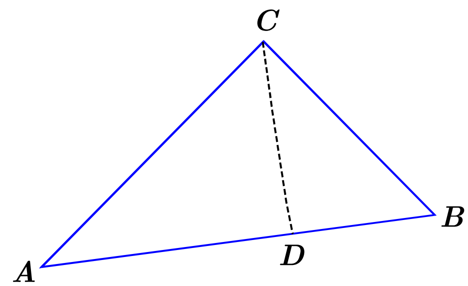
- Define dos puntos directos A y C.
- Construye el segmento b que une a los puntos C y A.
- Traza la recta $l1$ perpendicular a la recta b que pasa por C.
- Encuentra un punto B en la recta $l1$.
- Construye los segmentos a que une a los puntos B y C y b que une a los puntos A y B.
- Traza el círculo $c1$ con centro en A y que pasa por B.
- Construye la recta $l2$ perpendicular a la recta c que pasa por el punto A.
- Encuentra el punto de intersección F de la recta $l2$ con el círculo $c1$ del otro lado de C.
- Construye la recta $l3$ paralela a la recta c por el punto F.
- Encuentra la proyección G del punto B en la recta $l3$.
- En el ícono de recta elige *Polígono*, en la ventana **Número de vértices** escribe 4 y haz click en  . Llámalo $BAFG$, es el cuadrángulo de vértices B, A, F, G.
- Ahora construye el círculo $c2$ con centro en C y que pasa por el punto A.
- Determina el punto de intersección I de la recta a y el círculo $c2$, del otro lado de B.
- Construye la recta $l4$ paralela a la recta b por el punto I.
- Encuentra la proyección H del punto A en la recta $l4$.
- Determina el cuadrángulo $ACIH$ de vértices A, C, I, H.
- Traza el círculo $c3$ con centro en C y que pasa por B.
- Determina el punto de intersección J de la recta b y el círculo $c3$, del otro lado de A.
- Construye la recta $l5$ paralela a la recta a por el punto J.
- Encuentra la proyección K del punto B en la recta $l5$.
- Determina el cuadrángulo $CBKJ$ de vértices C, B, K, J.
- Traza la recta perpendicular $l6$ a la recta c por el punto C.
- Encuentra los puntos de intersección D de las rectas c y $l6$ y E de las rectas $l6$ y $l3$.
- Determina los cuadrángulos $DAFE$ de vértices D, A, F, E y $BDEG$ de vértices B, D, E, G.
- En el ícono de escalar elige *Área y perímetro*, aparece un submenú y elige *Área de un polígono* llámala $area1$ del polígono $DAFE$. De manera análoga define $area2$ del polígono $ACIH$, $area3$ del polígono $BDEG$ y $area4$ del polígono $CBKJ$.
- Compara las área de los polígonos.

(b) *Segunda demostración.*

Consideremos el triángulo rectángulo ABC.



Trazamos la perpendicular al lado c que pasa por el vértice C. De esta manera tenemos los triángulos ADC y CDB.



Los triángulos ABC y ADC son semejantes por ser ambos triángulos rectángulos y tener dos lados en común. Entonces

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

de donde

$$AC \cdot AC = AB \cdot AD$$

lo que podemos escribir como

$$b^2 = c \cdot AD \tag{1}$$

Los triángulos ABC y CDB son semejantes por ser ambos triángulos rectángulos y tener dos lados en común. Entonces

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC}$$

de donde

$$BC \cdot BC = AB \cdot DB$$

lo que podemos escribir como

$$a^2 = c \cdot DB \tag{2}$$

Si sumamos (1) y (2) obtenemos

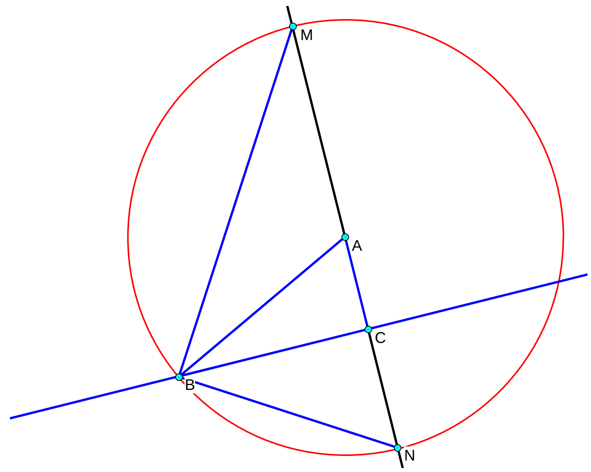
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c \cdot DB + c \cdot AD \\ &= c \cdot (AD + DB) \\ &= c \cdot c \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Construcción:

- Define los puntos directos $A\,(2,3)$ y $C\,(7,6)$.
- Traza el segmento b que une A con C.
- Construye la recta perpendicular a a la recta b y que pasa por el punto C.
- Con la instrucción punto en la recta, localiza el punto B en la recta a.
- Traza el segmento c que une A con B.
- Dibuja la recta perpendicular ℓ a la recta c y que pasa por el punto C.
- Localiza el punto D de intersección de las rectas ℓ y c.
- Define las distancias AB, BC, CA, AD y DB.
- Calcula los escalares $a2$ como $AB * DB$ y $b2$ como $AB * AD$.
- Ahora encuentra el escalar calculado d como $a2 + b2$.
- Calcula el escalar $c2$ como $AB * AB$.
- Compara los valores d y $c2$.
- Marca los renglones donde están d y $c2$ y llévalos a la pantalla gráfica.

- Ve a la pantalla gráfica y mueve el punto B. Observa los valores d y $c2$.

(c) *Tercera demostración.*



Sea ABC un triángulo rectángulo. Se traza un círculo con centro en A y radio c. Se prolonga el lado b del triángulo de manera que corte al círculo en M y N. Tenemos que:

$$\begin{aligned} MC &= MA + AC \\ &= c + b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} CN &= AN - CN \\ &= c - b. \end{aligned}$$

Consideramos los triángulo MCB y BCN los cuales son semejantes, ya que ambos son triángulos rectángulos, tiene el lado CB en común y CN es prolongación de MC. Entonces

$$\frac{BC}{MC} = \frac{CN}{BC},$$

es decir,

$$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}$$

de donde

$$\begin{aligned} a^2 &= (c+b)(c-b) \\ &= c^2 - b^2 \end{aligned}$$

así

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Construcción:

- Define los puntos directos $A(2,0)$ y $C(3,-4)$.
- Traza el segmento $b1$ que une A con C y haz visible la parte exterior.
- Construye la recta perpendicular $a1$ a la recta $b1$ y que pasa por el punto C.
- Con la instrucción punto en la recta, construye el punto B en la recta $a1$.

- Traza el segmento $c1$ que une A con B.
- Traza el círculo cir con centro en A y que pasa por B.
- Localiza el punto de intersección M del círculo cir con la recta $b1$ que está del otro lado de C.
- Ahora localiza el punto de intersección N del círculo cir con la recta $b1$ al otro lado de M.
- Define las distancias MC del punto M al punto C, CN del punto C al punto N , a del punto B al punto C, c del punto A al punto B, b del punto C al punto A.
- Calcula los escalares d como $MC * CN$ y $a2$ como $a * a$ y compara estos valores.
- Por último calcula el escalar $d1$ como $c * c - b * b$.

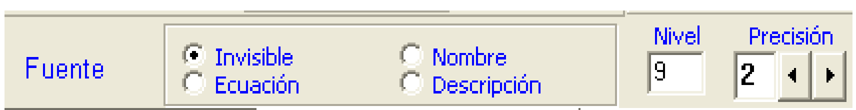
5. **Teorema de Thales**

Si en un triángulo ABC una recta corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en dos puntos distintos, P y Q, y la recta es paralela al tercer lado $\overline{BC}$, entonces

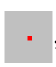
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}.$$

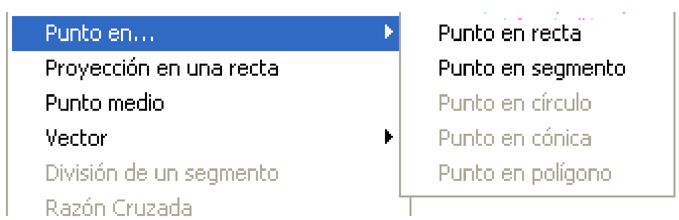
Construcción

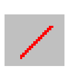
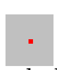
- Construye un triángulo A, B, C y llama a, b, c a los lados opuestos. Puedes usar alguno que hayas hecho anteriormente.
- Ve a la pantalla de datos, haz click sobre el renglón del segmento a, en la parte superior de la pantalla aparece



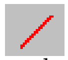
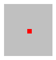
ahora haz click en Nombre, ve a la pantalla gráfica y observa que el segmento ya tiene etiqueta. Haz lo mismo con los segmento b y c.

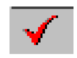
- Utilizando , construye un punto P en el segmento AB

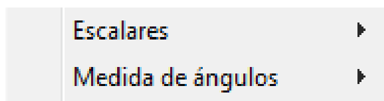


- Usando  elige *Recta paralela*, llámala ℓ, paralela al lado a que pase por P .
- En  elige *Escales* y del menú *División de un segmento* y construye la razón r en la que el punto P divide al segmento AB, es decir $r = AP/PB$.
- Ahora usando  elige *Intersección de...* y del submenú *Intersección de rectas*, llama Q al punto de intersección de la recta ℓ y la recta b.
- Construye la razón s en la que el punto Q divide al segmento AC, es decir, $s = AQ/QC$.
- Compara los valores de r y s.

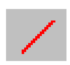
6. **Triángulos**

- Construye los puntos directos $A(2,4)$, $B(1,5)$, $C(-2,-1)$.
- En el constructor  *Define rectas,* del menú elige *Segmento entre dos puntos*, el programa lo llama a al segmento, haz doble click en B y C. Repite este paso llamando b al segmento de C a A y c al segmento de A a B.
- Para calcular el área del triángulo debemos construir un polígono de 3 lados encima del que tenemos. En  *Define puntos*, elegimos *Polígono.* En la pantalla aparece la ventana

en donde dice **Número de vértices** ponemos 3 y damos click en  entonces en la pantalla gráfica aparece un triángulo encima del que ya teníamos.

- En  elegimos del menú  *Escalares* y del submenú *Área y perímetro.*

7. **Ortocentro.**

- Para construir las alturas, en  *Define rectas,* utiliza la construcción *Recta perpendicular.* Llama ha a la altura desde el vértice A. (recta perpendicular a la recta a desde el punto A) similarmente construye hb y hc.
- Cambia el color de estas rectas. Ve a la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor en el renglón donde está definida ha y da click con el botón derecho, haz lo mismo en los renglones hb y hc, observa que los renglones están de color amarillo. Haz click en el botón de  *Cambiar atributos gráficos* y elige *Definir*, aparece la ventana

debajo de la palabra **Color** da un click en el rectángulo azul y da un click en el color rosa, y otro click en . Después debajo de la palabra **Nivel** cambia el número 2 por 9.

- Ve a la pantalla gráfica y da un click en el número 9 de la barra que está a la izquierda de la pantalla. Observa que desaparecieron las alturas del triángulo. Dando click nuevamente en el 9 las alturas reaparecen.
- En , elige *Intersección de* y del submenú elige *Intersección de rectas* llama H a este punto y da click en ha y otro en hb.
- Da click en *Define condiciones*, elige del menú *Geométricas* y del submenú *Punto en* y después sólo puedes elegir *Recta* da un click en H y otro click en hc. Ve a la pantalla gráfica y observa que en el último renglón dice Verdadero.
- El punto H se llama ortocentro
- Mueve los vértices para observar cómo se comporta el ortocentro. ¿puede salirse del triángulo?

8. **Circuncentro**.

   - Utiliza el constructor de rectas, elige del menú *Mediatriz* llámala mAB, es la mediatriz de los puntos A y B. Ahora construye las mediatrices mBC de los puntos B y C, y mCA de los puntos C y A.
   - Cambia a color verde las mediatrices para distinguirlas de las alturas y de los lados del triángulo. También cámbialas de nivel, colócalas en el nivel 4. De esta manera, puedes ocultarlas apagando dicho nivel.
   - Construye el circuncentro del triángulo encontrando el punto de intersección de mAB y mBC. Llámalo O.
   - Verifica que O está en mCA. Da click en *Define condiciones*, elige del menú *Geométricas* y del submenú *Punto en* y después sólo puedes elegir *Recta* da un click en O y otro click en mCA. Ve a la pantalla gráfica y observa que en el último renglón dice Verdadero.
   - Construye las distancias da, db y dc del circuncentro a los vértices A, B, C respectivamente. Utiliza el constructor *Distancia entre puntos* del menú de escalares. Comprueba que son iguales. Esto implica que un círculo con centro en O que pase por uno de los vértices, también pasará por los otros. Dicho círculo es el circuncírculo del triángulo.
   - Mueve los vértices para observar cómo se comporta el circuncentro. ¿puede salirse del triángulo?

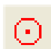
9. **Baricentro**.

   - Construye los puntos medios de los lados del triángulo: M el punto medio del segmento AB, N el punto medio de BC y L el punto medio de CA.
   - Construye las medianas (la recta que pasa por uno de los vértices y por el punto medio del lado opuesto) del triángulo. Utiliza el constructor *Recta por dos puntos*. Llama n a la mediana desde N, m a la mediana desde M y l a la mediana desde L.
   - Cámbialas a color naranja para distinguirlas de las mediatrices y las alturas. También cámbialas de nivel, colócalas en el nivel 5. De esta manera, puedes ocultarlas apagando dicho nivel.
   - Construye el baricentro G, del triángulo, el punto de intersección de las medianas m y n.
   - Verifica que G está en la mediana l.

10. **Recta de Euler**.

- Construye la recta que pasa por H y G llámala *euler* y comprueba que pasa por O. Esta recta se llama la recta de Euler. En la pantalla de datos analíticos marca el renglón donde está definida la recta, cámbiala de color usando un color que no hayas usado. También cambia el grueso de la recta, para ello, en el cuadrito debajo de la etiqueta *Ancho*, márcalo y pon un 2.
- Mueve el triángulo y observa las posiciones de H, G y O. ¿Puedes lograr que los tres coincidan?, ¿puedes lograr que dos coincidan y uno no? ¿puedes lograr que cambien de orden?

5 Círculo de los nueve puntos

- En la pantalla gráfica oculta las medianas y las mediatrices.
- Construye los puntos D, E y F como las intersecciones de las alturas con los lados.
- En  elige *circuncírculo* y construye el círculo, *cir*, que pasa por los puntos D, E y F.
- Verifica que los puntos medios de los lados del triángulo L, M y N están el círculo *cir*.
- Construye el punto medio P entre H y A. De igual manera, construye los puntos Q y R como puntos medios entre H y B y entre H y C.
- Comprueba que el círculo *cir* también pasa por estos tres puntos.
- Es por esta razón que este círculo se llama el **círculo de los 9 puntos**.

6 Círculos

Hay diversas maneras de dibujar un círculo con Geolab, veamos algunas de ellas:

1. **Círculo directo**.

   Haz click en el ícono  *Define círculo* y elige en el menú *Círculo Directo*. Una vez construido puedes dar click con el botón derecho sobre él y cambiar los valores de a, b y r en la ventana de *Objeto calculado*.

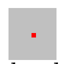
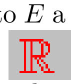
2. **Círculo dado el centro y radio**.

   - Construye el punto, $A\,(2,3)$ y el escalar $r = 5$.
   - Ahora utiliza el constructor de círculos y elige en el menú *Centro y radio*.

3. **Círculo dado el centro y un punto de él**.

   - Construye los puntos $A\,(2,-3)$ y $B\,(5,1)$.
   - Ahora utiliza el constructor de círculos y elige en el menú *Centro y punto* para construir un círculo con centro en A que pase por B.

4. **Circuncírculo**.

   - Construye un triángulo ABC.
   - Utiliza el constructor de círculo y elige en el menú *Circuncírculo* para construir el circuncírculo de dicho triángulo. Llámalo D.
   - Construye las mediatrices de los lados y comprueba que se cortan en el centro del circuncírculo (circuncentro). Para ello encuentra el punto E de intersección de dos mediatrices. Ahora para determinar el centro del circuncírculo, en el ícono  elige *Calculado* en la ventana de abajo escribe $D.a$ después haz click arriba en el renglón donde aparece la y y en la ventana de abajo escribe $D.b$, por último haz click en la paloma. Compara las coordenadas de este último punto con las coordenadas de E.
   - Encuentra la distancia d del punto E a cualquiera de los vértices del triángulo. Determina el radio del círculo, para ello, en el ícono  elige *Calculado* en la ventana de abajo escribe $D.r$ y haz click en la paloma. Compara los valores de d con este último escalar.

5. **Incírculo**.

   - Construye un triángulo ABC.
   - Utiliza el constructor de círculo y elige en el menú *Incírculo* para construir el incírculo de dicho triángulo.
   - Construye las bisectrices interiores de los lados y comprueba que se cortan en el centro del incírculo (incentro).

6.1 Construcciones que dependen de círculos

Ahora veamos algunas construcciones que dependen de los círculos.

1. **Círculo por dos puntos con centro en una recta dada.**

   Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $A\,(-3,4)$, $B\,(0,-5)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $x - 5y = 0$. Para ello:

- Construye los puntos y la recta (a).
- Construye la mediatriz, b, del segmento AB
- Encuentra el punto de intersección, C, de las rectas a y b.
- Finalmente, construye el círculo con centro en C que pasa por A.

2. **Intersección de recta y círculo**.

    - Construye la recta m con ecuación $2x - y - 10 = 0$. Puedes construirla como *Recta directa*.
    - Construye el círculo c con centro en $O\,(4, -2)$ y radio $r = \sqrt{20}$. Para construir el radio r utiliza el constructor *Define escales* $\longrightarrow$ *Escalar* $\longrightarrow$ *Calculado* y escribe *sqrt*(20) en el espacio para la fórmula.

      En la pantalla gráfica se ve que la recta es un diámetro del círculo, es decir, pasa por el centro y la recta corta al círculo en dos puntos. Para encontrar las intersecciones lo podemos hacer *Por ratón*, *Mismo lado de un punto* y *Otro lado de un punto.*
    - Construye una intersección, $P1$ usando el constructor *Intersección de recta y círculo* $\longrightarrow$ *Por ratón*. Si quieres que $P1$ sea la otra intersección, selecciona al punto y arrástralo hacia la otra intersección. Observa cómo el punto $P1$ persigue al cursor.
    - Construye la otra intersección, $P2$ de la recta m, el círculo c y del otro lado de $P1$, usando el constructor *Intersección de recta y círculo* $\longrightarrow$ *Del otro lado de un punto.*

3. **Recta tangente a un círculo**.

    - Construye el círculo B con centro en $A\,(3, 12)$ y radio $r = 10$.
    - Construye el punto $C(-5, 6)$. Utiliza  *Define condiciones*, elige *Geométricas* $\longrightarrow$ *Punto en* $\longrightarrow$ *círculo* para determinar si el punto C está en el círculo B.Ve a la pantalla de datos y observa el último renglón.
    - Utiliza el constructor *Recta tangente a círculo* y del submenú elige *Por ratón*, para construir la recta tangente, $t1$, al círculo B desde el punto C. Como C pertenece al círculo, hay una sola tangente.
    - Construye ahora el punto $D\,(17, 14)$ y repite la construcción de la tangente. Llámala $t2$.

      También puedes construir una tangente utilizando los constructores *Recta tangente a círculo del mismo lado de un punto* o *Recta tangente a círculo del otro lado de un punto.*
    - Borra la recta $t1$, utiliza como punto auxiliar el punto C que construiste antes. Construye la tangente $t1$ desde el punto C del mismo lado que el punto D. Ve a la pantalla gráfica y observa cómo ahora esta tangente no aparece en la lista de la derecha y por tanto, no la puedes mover.
    - Mueve C al interior del círculo y observa que las rectas tangentes desaparecen. Ve a la pantalla de datos y oprime el botón **Datos cartesianos** observa que en el renglón donde está definida la recta tangente en el punto C dice no existe el objeto.

4. **Intersección de círculos, eje radical**.

    El eje radical de dos círculos es la recta formada por los puntos Q de manera que las tangentes a ambos círculos desde Q tienen la misma longitud. Cuando ambos círculos se cortan, el eje radical es la recta que pasa por los puntos de corte.

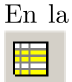
    - Construye el círculo $c1$ con centro en $O1\,(-1, -1)$ y radio $r1 = 2$ y el círculo $c2$ con centro en $O2\,(2, 1)$ y $r2 = 3$. Observa que estos círculos se cortan en dos puntos.
    - Construye el eje radical, w, de ellos. Utiliza el constructor *Eje radical* del menú de rectas. Observa que esta recta pasa por los puntos de intersección.

- Selecciona el centro $O1$ y arrástralo para alejarlo del círculo $c2$. Mientras los círculos se corten, el eje radical pasa por los puntos de intersección. Cuando no se cortan, el eje radical sigue existiendo a pesar de que los puntos de intersección no existan. Si esta recta la hubiéramos construido como la recta que pasa por los puntos de intersección, se hubiera perdido al alejar los círculos.

5. **Potencia de un punto a un círculo**.

   Considera un círculo y una recta que lo corta en dos puntos. La potencia de un punto sobre la recta al círculo es el producto de las distancias dirigidas del punto a cada uno de los puntos de intersección. La potencia puede ser positiva, negativa o cero.

   Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

   - Construye un punto R en la recta w.
   - Construye un punto $X1$ en el círculo $c1$.
   - Construye la recta m, que pase por R y $X1$.
   - Construye el punto de intersección $X2$ de la recta m con el circulo $c1$ del otro lado del punto $X1$.
   - Construye las distancias $d1$ y $d2$ del punto R a los puntos $X1$ y $X2$ respectivamente.
   - Calcula el producto $p = d1 * d2$. Hazlo con el constructor *Escalar calculado*.
   - Utiliza el constructor de escalares, elige el menú *Potencia*, para construir la potencia, q, de R a $c1$.
   - Construye la potencia, s, de R a $c2$. Observa que $q = s$.
   - En la pantalla de datos, marca los renglones correspondientes a p, q y s. Haz click en el icono  *Objetos para observar*.
   - Mueve el punto R y observa cómo se modifica p dependiendo de si R está fuera, en o dentro de $c1$.

     Gracias a que R está en el eje radical de $c1$ y $c2$, las dos potencias, q y s son iguales, ya que el *Eje radical* de dos círculos es el conjunto de puntos tales que sus potencias a los dos círculos son iguales.

6.2 Aplicaciones

Fimalmente veamos algunos teoremas que dependen de círculos, y cómo pueden ilustrarse con Geolab.

1. **Ángulo que subtiende a un diámetro**.

   - Construye un círculo A.
   - Utiliza el constructor de puntos y elige en el menú: *Punto en Círculo*, llama B al punto que deberá estar en el círculo A.
   - Utiliza el constructor de rectas y elige en el menú: *Recta por dos puntos* para construir el diámetro, a, del círculo trazando la recta que une a A y B.
   - Utiliza el constructor de puntos, elige del menú *Intersección de recta y círculo* y la opción del submenú *Otro lado de un punto* para construir la otra intersección, C, de a con el círculo A del otro lado de B.
   - Con el constructor de puntos elige en el menú *Punto en Círculo* y llama D al punto en el círculo. Si el punto D está encimado con B o C muévelo.
   - Construye los segmentos $b = DB$ y $c = DC$.

- Utiliza el constructor de escalares, elige la opción *Medida de ángulos* y del submenú elige *Del ángulo AOB* para construir E, el ángulo CDB. Ahora marca E como objeto a observar, mueve el punto D y ve cuanto mide el ángulo E.

2. **Círculo de los 9 puntos**.

- Construye el triángulo cuyos vértices son $A\,(0,5)$, $B\,(-2,-3)$ y $C\,(4,1)$.
- Construye las alturas ha, hb, hc y el ortocentro H.
- Construye los puntos D, E y F como las intersecciones de las alturas con los lados.
- Construye el círculo, *cir*, que pasa por los puntos D, E y F. Eligiendo *circuncírculo* en el constructor de círculos
- Ahora construye los puntos medios de los lados del triángulo, llámalos L, M y N y observa que el círculo *cir* pasa por ellos.
- Construye el punto medio entre H y A. Llámalo P. De igual manera, construye los puntos Q y R como puntos medios entre H y B y entre H y C.
- Comprueba que el círculo *cir* también pasa por estos tres puntos.
- Es por esta razón que este círculo se llama el **círculo de los 9 puntos**.

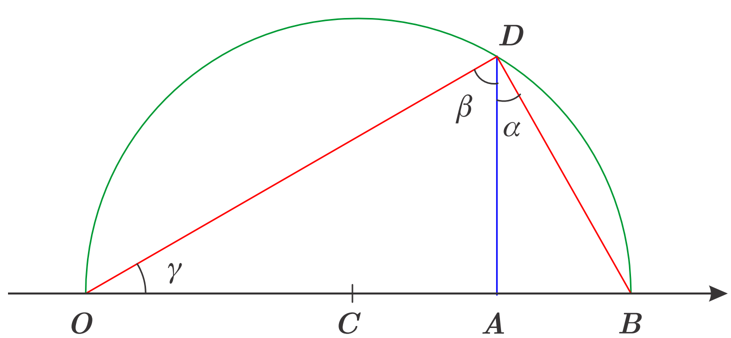
3. **Interpretación geométrica de** $\sqrt{5}$.

- Define el punto directo $O\,(0,0)$.
- Define el escalar directo $a = 5$.
- Define los puntos calculados $A\,(a,0)$ y $B\,(a+1,0)$.
- Traza el segmento b que une O con B.
- Localiza el punto medio C del segmento OB.
- Traza el círculo D con centro en C y que pasa por B.
- Traza una recta perpendicular c a b por A.
- Localiza el punto de intersección E de c con el círculo D.
- Determina la distancia d entre A y E.
- Cambia el valor del escalar a, por ejemplo 9 y observa el valor de la distancia d.

4. **Interpretación geométrica de la raíz cuadrada**

Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$.

- En la recta numérica localizamos el punto A tal que $OA = a$.
- Localizamos el punto B de manera que $AB = 1$.
- Encontramos el punto medio C de OB y trazamos un semicírculo con centro en C y radio OC.
- Por A trazamos una perpendicular y llamamos D al punto de intersección de la recta con el semicírculo.



El ángulo OBD es recto ya que subtiende un diámetro, entonces

$$\alpha + \beta = 90.$$

Por construcción los triángulos OAD y ABD son rectángulos.
En el triángulo OAD tenemos que

$$\gamma + \beta = 90.$$

Así

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90 \\ \gamma + \beta &= 90 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \gamma + \beta \\ \alpha &= \gamma. \end{aligned}$$

Como los triángulos OAD y ADB tienen dos ángulos iguales y un lado común, entonces son semejantes. Así

$$\frac{AD}{AB} = \frac{OA}{AD}$$

como $AB = 1$ y $OA = a$, entonces

$$AD \cdot AD = a$$

Si llamamos $x = AD$, entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ x &= \sqrt{a}. \end{aligned}$$

5. Otra manera de localizar $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

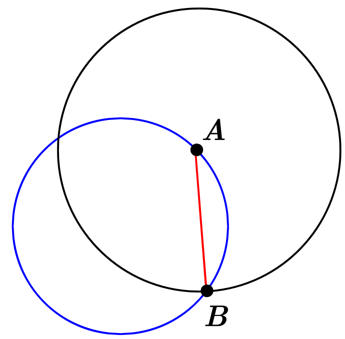
   - Define los puntos directos $O(0,0), A(1,0)$ y $B(1,1)$.
   - Traza el segmento a que une AB y el segmento b que une OB.
   - Traza la recta c que pasa por O y A.
   - Dibuja el círculo C con centro en O que pasa por B.
   - Encuentra el punto de intersección D de la recta c con el círculo C del otro lado del punto O.
   - Ve a la pantalla de datos analíticos y observa el valor de la primera coordenada de D.
   - Traza una recta perpendicular d a la recta c que pase por D.
   - Traza una recta e paralela a la recta c que pase por B.
   - Localiza el punto E de intersección de las rectas b y e.
   - Dibuja el círculo F con centro en O que pasa por E.
   - Encuentra el punto de intersección G de la recta c con el círculo F del otro lado del punto O.

6. Dibujar una cuerda de longitud 6 cm en un círculo de radio 4 cm.

   Solución:

   Colocamos un punto A en el círculo dado y trazamos un círculo con centro en A y radio 6.

Llamamos B a uno de los puntos de intersección de ambos círculos, y trazamos la cuerda que pasa por A y B, ésta es la cuerda buscada.

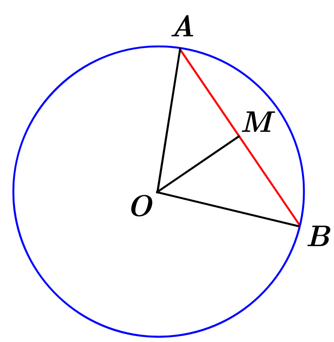


Construcción con Geolab

- Define un círculo directo C. En la pantalla de datos analíticos marca el renglón donde está definido C y cambia el valor del radio a 4.
- Coloca un punto A en el círculo C.
- Define un escalar directo $r = 6$.
- Construye un círculo D con centro en A y radio r.
- Determina B uno de los puntos de intersección de los dos círculos.
- Dibuja el segmento a por los puntos A y B.
- Encuentra la distancia entre A y B. El segmento a es la cuerda buscada.

7. La perpendicular desde el centro de un círculo a una cuerda biseca a ésta.

   Solución:



Trazamos la cuerda AB y la perpendicular a AB desde O.

Consideramos los triángulos AOM y MOB. Por construcción ambos triángulos son rectángulos y

$$OA = OB$$

por ser radios del círculo, además tienen un lado común OM, entonces los triángulos son iguales. De donde

$$AM = MB,$$

y como

$$\begin{aligned} AM + MB &= AB \\ 2AM &= AB \\ AM &= \frac{AB}{2}. \end{aligned}$$

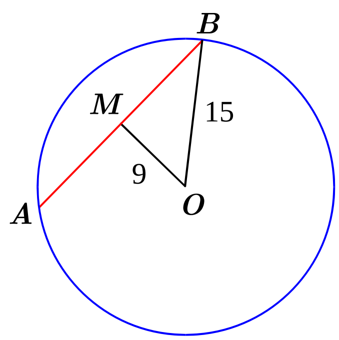
Por tanto, la perpendicular biseca a la cuerda.

Construcción con Geolab

- Construye un círculo directo O.
- Localiza dos puntos A y B en el círculo O.
- Traza el segmento a que une A y B.
- Dibuja la recta perpendicular b al segmento a por el punto O.
- Encuentra el punto de intersección C de a y b.
- Define las distancias AC y CB. Compara estas distancias.

8. Si un círculo tiene radio de 15 cm y una cuerda AB dista 9 cm del centro, ¿cuánto mide la cuerda?

Solución:



Trazamos la perpendicular a la cuerda desde el centro O del círculo. Llamamos M al punto donde la perpendicular corta a la cuerda.

Sabemos que la cuerda dista 9 cm del centro, entonces la distancia de O a M mide 9 cm. Unimos O con B, como OB es un radio del círculo mide 15 cm.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned} MB^2 &= 15^2 - 9^2 \\ &= 225 - 81 \\ &= 144, \end{aligned}$$

así

$$MB = \sqrt{144} = 12.$$

Como M es el punto medio de AB, entonces

$$AB = 2\,(12) = 24.$$

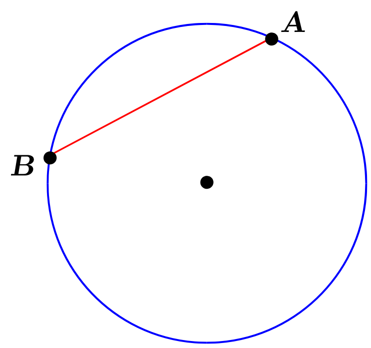
Construcción con Geolab

- Construye un círculo directo O. En la pantalla de datos analíticos, cambia el valor del radio a 15.
- Define un escalar directo r que valga 9.
- Construye un círculo $O1$ con centro en O y radio r.
- Localiza un punto M en el círculo $O1$.
- Traza la recta tangente al círculo $O1$ desde el punto M.
- Localiza los puntos de intersección A y B de la recta tangente y el círculo O.
- Encuentra la distancia entre A y B.
- Mueve el punto M y verifica la distancia de A a B.

9. Los puntos medios de todas las cuerdas de longitud 8 de un círculo de radio 5, están en un círculo con el mismo centro. Determinar el radio.

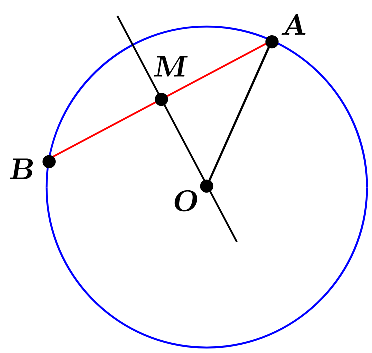
   Solución:

   Consideramos un círculo de radio 5 y una cuerda AB de longitud 8.



   Encontramos el punto medio M de la cuerda y trazamos la recta perpendicular a AB que pasa por M. Esta recta pasa por el centro del círculo.

   Debemos calcular la distancia OM que es el radio buscado. Unimos A con O y consideramos el triángulo OMA.

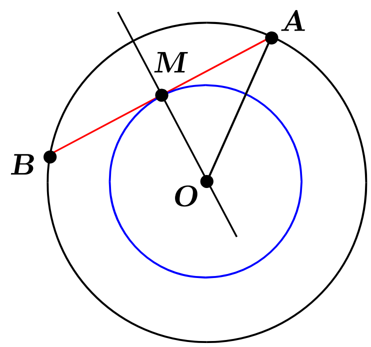


   El triángulo OMA es rectángulo por ser OM perpendicular a AB.

   Sabemos que $OA = 5$ por ser el radio del círculo O y $MA = 4$ ya que la cuerda mide 8 y M es el punto medio.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned} OM^2 &= OA^2 - MA^2 \\ &= 25 - 16 \\ &= 9. \end{aligned}$$



Por tanto, el radio del círculo buscado es 3.

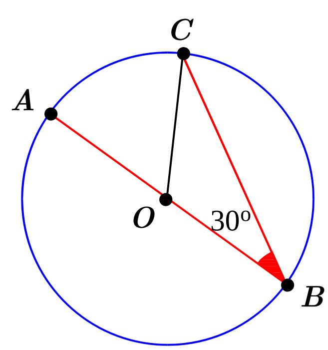
Construcción con Geolab

- Construye un círculo directo O, un punto A en el círculo y una cuerda AB de longitud 8.
- Localiza el punto M de la cuerda y en la pantalla de datos analíticos active la traza del punto.
- Define una animación del punto A de 0 a 1.
- Activa la traza de la pantalla gráfica y ejecuta la animación.
- Encuentra la distancia de O a M y construye un círculo con centro en O y radio esta distancia. Observa que este círculo coincide con el trazado por la animación.

10. El ángulo $\measuredangle CBA$ mide 30°, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle COA$?

    Solución:

    Ambos ángulos subtienden el mismo arco



Como el ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central, entonces

$$\begin{aligned} \measuredangle COA &= 2\measuredangle CBA \\ &= 2\,(30^\circ) \\ &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Por tanto, el ángulo $\measuredangle COA$ mide $60°$.

Construcción con Geolab

- Define un círculo directo O.
- Coloca un punto A en el círculo O.
- Traza una recta por a por los puntos A y O.
- Encuentra el punto de intersección B de la recta a y el círculo O del otro lado del punto A.
- Define un ángulo directo D de $-30 * pi\_/180$.
- Define una rotación T con centro en B y ángulo D.
- En el constructor de recta elije *Transformada* y construye la recta b que es la imagen de la recta a bajo la transformación T.
- Encuentra el punto de intersección C de la recta b con el círculo O del otro lado del punto B.
- Encuentra la medida del ángulo COA.

7 Cónicas

1. **Elipse como lugar geométrico**.

    - En la pantalla gráfica, utiliza el constructor *Define círculos*, elige del menú *Círculo directo*. Escribe C en el campo de nombre y da un click en la pantalla, luego da click con el botón derecho sobre el círculo para que aparezca la ventana de objeto calculado y llena los campos $a = 0$, $b = 0$ y $r = 5$.
    - Construye un punto directo P y colócalo dentro del círculo.
    - En elige del menú *Punto en* y del submenú *Punto en círculo*. Construye un punto Q sobre el círculo C.
    - Construye la mediatriz, m, de P y Q.
    - Arrastra el punto Q y observa cómo se mueve la mediatriz. Ahora indícale a la mediatriz que deje traza. Ve a la pantalla gráfica, prende el botón de traza y vuelve a mover el punto Q. ¿Qué figura envuelve la mediatriz?
    - Crea una animación, animando el punto Q entre 0 y 1 y ejecútala.

2. Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

    - Construye un *Escalar calculado*, a, poniendo en la fórmula: $C.r/2$ para indicar que a vale la mitad del radio de C.
    - Utiliza el constructor *Define cónica*, elige del menú *Focos y a* para construir una cónica c con focos en C y P y con a como radio focal. Cámbiala de color.
    - En la pantalla de datos analíticos, colócate sobre el renglón que define a la cónica y aparece un nuevo botón **Datos**, haz click sobre él y observa toda la información que te da sobre la cónica.
    - Cierra la animación.

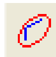
3. **Hipérbola como lugar geométrico**.
    Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

    - Lleva al punto P fuera del círculo, limpia la pantalla con el botón que aparece a la izquierda de la pantalla con una T y una goma, y ejecuta nuevamente la animación. Observa que la elipse construida en el ejercicio anterior se convierte en hipérbola y que la mediatriz de P y Q la envuelve.

4. **Parábola como lugar geométrico**.

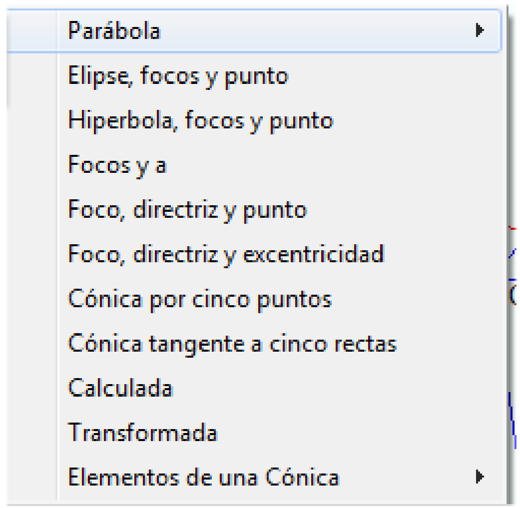
    - Construye dos puntos A y B y el segmento, s, que los une.
    - Construye un punto directo P y un punto Q en el segmento AB. Ve a la pantalla gráfica y si es necesario mueve P de manera que no quede alineado con A y B.
    - Construye la mediatriz, m, de P y Q.
    - Arrastra el punto Q y observa cómo se mueve la mediatriz.
    - Ahora indícale a la mediatriz que deje traza. Ve a la pantalla gráfica, prende el botón de traza y vuelve a mover el punto Q. ¿Qué figura envuelve la mediatriz?
    - Crea una animación, animando el punto Q entre -2 y 2 y ejecútala.

5. Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

   - Utiliza el constructor  *Define cónica*, elige del menú *Parábola* y del submenú *Foco directriz* para construir una parábola con foco P y directriz s.
   - Ejecuta nuevamente la animación.

6. Constructores de Geolab

   Geolab tiene muchos constructores para construir cónicas



   Para usar cualquiera de ellos, simplemente hay que construir de antemano los elementos necesarios, por ejemplo, para el segundo consctructor: Elipse, focos y punto hay que tener tres puntos, dos de ellos serán los focos y el tercero es un punto por donde pasa la elipse.

   Observa que los constructores: "*Focos y a*", "*Foco, directriz y punto*", "*Foco, directriz y excentricidad*" no especifican qué cónica se está construyendo y el tipo de cónica que se obtenga dependerá de la relación que haya entre los elementos con los que se construye. Por ejemplo:

   - **Focos y a:**
     Construye los puntos $A(-3,0)$ y $B(3,0)$ y el escalar $a=5$. Ahora usa el constructor *Focos y a* para construir una cónica. Nota que el resultado es una elipse ya que en este caso, la distancia del centro a cualquier foco es $c=3$ que es menor que $a=5$.

     Arrastra el punto B hacia la derecha, observa que la elipse se va alargando conforme el punto B se aproxima al punto $(7,0)$. Cuando lo rebasa, la curva se convierte en hipérbola, pues ahora la distancia del centro a los focos es mayor que $a=5$.
   - **Cónica por cinco puntos:**
     Este constructor utiliza un teorema que afirma que dados 5 puntos, de manera que ninguna tercia esté alineada, hay una única cónica que pasa por ellos. Crea 5 puntos y luego utiliza este constructor. Una vez creada la cónica arrastra cualquier punto para ver cómo se mueve la cónica. Observa cómo a veces es elipse y a veces es hipérbola.

     Ahora coloca tres de ellos en el eje X, por ejemplo, $A(-4,0)$, $B(0,0)$, $C(5,0)$. Observa que lo que obtienes es un par de rectas. Una que pasa por A, B y C y la otra que pasa por D y E.

7. **Elementos de una cónica:**

   Este constructor permite construir puntos, rectas y escalares, ángulos que son elementos de una cónica, como centro, focos, ejes, directrices, asíntotas y parámetros. Una vez construidos estos elementos pueden utilizarse para construir otros objetos a partir de ellos. Por ejemplo:

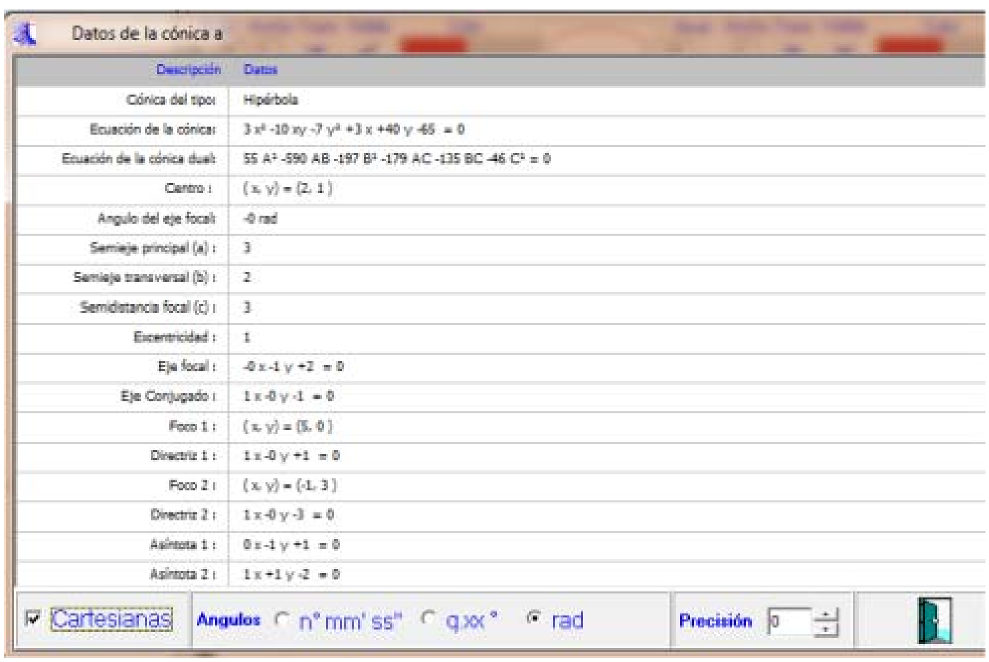
   Encontrar el centro y el eje focal de la cónica dada por la ecuación $3x^2 - 10xy - 7y^2 + 3x + 40y - 65 = 0$

   - Primero utiliza el constructor *Conica calculada* para construir la cónica pedida, llámala a y pon los números $3, -10, -7, 3, 40, -65$ en las casillas de la ventana de objeto calculado.
   - El resultado es una hipérbola.
   - Ahora utiliza el constructor *Centro* que se encuentra en el menú *Elementos de una cónica.* Llama O a dicho punto. Observa que el punto O aparece en el centro de la hipérbola.
   - Finalmente, utiliza el constructor *Eje focal* que se encuentra en el mismo menú. La recta construida de esta manera pasa por el centro de la hipérbola y por sus vértices.
   - Experimenta a construir otros elementos de la cónica.

8. **Datos algebraicos de una cónica**

   Utiliza la cónica del ejemplo anterior. En la pantalla de Datos coloca el cursor encima del renglón correspondiente a la cónica. Observa que en el extremo derecho de la pantalla aparece el botón 

, que no aparece cuando el cursor está en otro renglón. Al oprimirlo aparece una ventana con todos los datos relevantes de la cónica:



Descripción	Datos
Cónica del tipo:	Hipérbola
Ecuación de la cónica:	3 x² -10 xy -7 y² +3 x +40 y -65 = 0
Ecuación de la cónica dual:	55 A² -590 AB -197 B² -179 AC -135 BC -46 C² = 0
Centro :	(x, y) = (2, 1)
Angulo del eje focal:	-0 rad
Semieje principal (a) :	3
Semieje transversal (b) :	2
Semidistancia focal (c) :	3
Excentricidad :	1
Eje focal :	-0 x -1 y +2 = 0
Eje Conjugado :	1 x -0 y -1 = 0
Foco 1 :	(x, y) = (5, 0)
Directriz 1 :	1 x -0 y +1 = 0
Foco 2 :	(x, y) = (-1, 3)
Directriz 2 :	1 x -0 y -3 = 0
Asíntota 1 :	0 x -1 y +1 = 0
Asíntota 2 :	1 x +1 y -2 = 0

   En la parte inferior hay controles para cambiar el número de decimales con los que aparecen los datos, el formato del ángulo y si quieres que muestre los datos cartesianos o polares.

9. **Elementos gráficos de una cónica.**

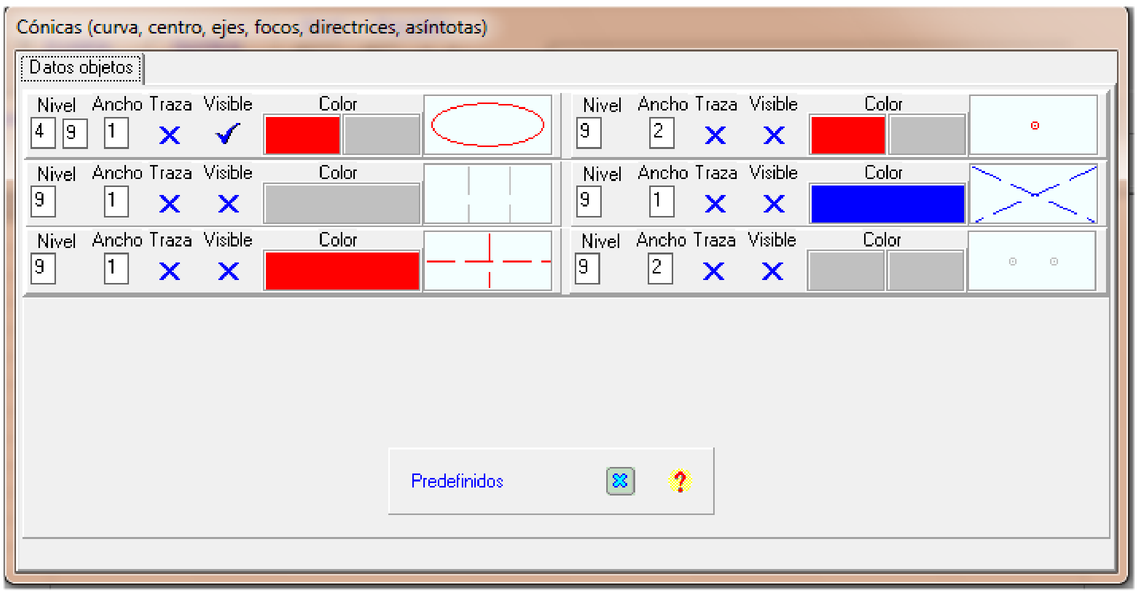
   Cuando Geolab dibuja una cónica, por defecto únicamente dibuja la curva, pero conoce muchos componentes gráficos de ella, como su centro, focos, ejes, directrices, asíntotas, etc.

Para observar estos componentes, ve a la pantalla de datos y pon el cursor en el renglón correspondiente a una cónica que ya hayas construido, por ejemplo, la del paso 7.

En el panel donde están las características gráficas de la cónica,

oprime el botón

Aparece ahora la siguiente pantalla



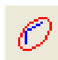
Estos son los seis componentes gráficos que tiene la cónica: curva, asíntotas, ejes, centro, asíntotas, focos. Observa que el único componente que tiene una paloma en el botón Visible es el de la curva. Puedes cambiar la visibilidad de cualquiera de los otros componentes haciendo click en el tache para que aparezca una paloma. También puedes cambiar su color, ancho, nivel, etcétera.

8 Parábola

En esta sección mostramos algunas maneras de construir parábolas y operaciones que se pueden hacer con ellas.

1. **Parábola dados foco y directriz**.

   Construye la parábola cuyo foco es $F(-5, 0)$ y su directriz es $x = 5$,

   - Construye primero el foco y la directriz.
   - En el constructor  *Define cónica*, elige del menú *Parábola* y del submenú *Foco Directriz.*
   - En la pantalla de datos analíticos, marca el renglón donde está definida la parábola y oprime el botón de **Datos**.

2. **Parábola dados foco y vértice**.

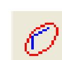
   Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $V(5, -2)$ y su foco está en $F(5, -4)$.

   Observa que Geolab no tiene un constructor para construir una parábola dados el foco y el vértice, así que con los datos que tienes debes construir la directriz para después utilizar la construcción de foco y directriz. La directriz es una recta perpendicular al eje de la parábola y está a la misma distancia del vértice que el foco, pero del lado opuesto.

   - Define el vértice y el foco.
   - Dibuja la recta, ℓ, que pasa por V y F.
   - Construye el círculo, c, con centro en V que pase por F.
   - Encuentra la intersección del la recta ℓ y el círculo c que está del otro lado que F. Llámala D.
   - Construye la recta, d, perpendicular a ℓ que pasa por D. Ésta es la directriz.
   - Finalmente construye la parábola *par* con foco F y directriz d.

3. **Parábola calculada**.

   Encontrar los elementos de la parábola cuya ecuación es $12x - y^2 + 10y - 61 = 0$.

   - Para construir una parábola dada su ecuación, utiliza el constructor  *Define Cónica* $\longrightarrow$ *Calculada.* Llama p a la parábola y dale los valores siguientes a los coeficientes de la ecuación: $A = 0$, $2B = 0$, $C = -1$, $2D = 12$, $2E = 10$, $F = -61$.
   - En la pantalla de datos analíticos coloca el cursor en el renglón de la parábola y oprime el botón de **datos** para ver toda la información de ella.
   - Ahora con el constructor *Puntos de una cónica* $\longrightarrow$ *Foco* del menú de puntos, encuentra el foco.
   - Con los constructores *Rectas de una cónica* $\longrightarrow$ *Eje focal* y *Rectas de una cónica* $\longrightarrow$ *Directriz* del menú de rectas encuentra el eje focal y la directriz.
   - Por último, encuentra el vértice de la parábola, como el punto de intersección del eje focal y la parábola.

4. **Intersección de recta y parábola**.

   Encontrar los puntos de intersección de la recta $x + y - 1 = 0$ con la parábola $x^2 - 4x - y + 1 = 0$.

   - Construye la parábola p cuya ecuación es $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ y la recta m cuya ecuación es $x + y - 1 = 0$. Utiliza para ello el constructor *Calculada* del menú de cónicas y de rectas, respectivamente.

- Construye el punto $P1$, usando *Intersección de recta y cónica por ratón* del menú de puntos. Puedes arrastrar el punto $P1$ hacia cualquiera de los puntos de intersección. En la ventana de datos cartesianos puedes ver las coordenadas del punto.
- Utilizando *Intersección de recta y cónica del otro lado de un punto*, construye el punto $P2$, intersección de la cónica p con la recta m del otro lado que $P1$. Ahora en la pantalla gráfica selecciona $P1$ y muévelo hacia $P2$, observa que los puntos cambian de lugar.

5. **Familia de parábolas**.

   Dibujar parábolas que tengan su foco en el eje X y cuya directriz sea el eje Y.

   - Dibuja la recta d con ecuación $x = 0$.
   - Define un escalar $t = -10$.
   - Construye el punto F cuyas coordenadas sean $(t, 0)$. Utiliza el constructor punto calculado. Dale los valores $x = t$, $y = 0$.
   - Construye la parábola p con foco F y directriz d.
   - Define una animación. Anima el escalar t entre -10 y 10.
   - En la pantalla gráfica, ejecuta la animación para ver cómo varían las parábolas.
   - Si quieres que se queden dibujadas todas las parábolas, en la pantalla de datos analíticos, indica que la parábola deja traza y en la pantalla gráfica, habilita el selector  que está en el margen izquierdo. Ejecuta la animación nuevamente.

6. **Recta tangente a una parábola**.

   Dada la parábola cuyo foco es $F(-1, 5)$ y cuya directriz es $x + y + 1 = 0$. Encuentra la recta tangente a ella que pasa por el punto $P(0, 1)$.

   - Construye la parábola p con foco F y directriz d con ecuación $x + y + 1 = 0$.
   - Construye el punto $P(0, 1)$.
   - Utiliza el constructor *Tangente a cónica por ratón* del menú de rectas para construir la tangente $t1$ a la parábola p que pasa por el punto P. Una vez construida, elígela en la tabla de la derecha de la pantalla y arrástrala con el ratón de uno a otro lado de la parábola.
   - Construye otro punto Q cualquiera.
   - Usando el constructor *Tangente a cónica del mismo lado de un punto* del menú de rectas construye la tangente $t2$ a la parábola p desde el punto P del mismo lado de Q. Cambia el color de $t2$. En la pantalla gráfica, mueve el punto Q y observa cómo lo persigue la tangente.

7. **Parábola tangente a cuatro rectas**.

   Dadas cuatro rectas, no dos de ellas paralelas, hay una única parábola que es tangente a ellas.

   - Construye cuatro rectas $\ell 1$, $\ell 2$, $\ell 3$ y $\ell 4$.
   - Usando el constructor *Parábola* $\longrightarrow$ *Tangente a cuatro rectas* del menú de cónicas, construye la parábola p tangente a las rectas. ¿Qué sucede cuando dos de ellas son paralelas?

8. **Familia de parábolas**

   Familia de parábolas con directriz dada.

   - Define dos puntos directos A y B.
   - Construye el segmento d que pasa por los puntos A y B.

- Define un punto P en el segmento AB.
- Construye la recta m perpendicular a d que pasa por P.
- Construye un punto F en la recta m.
- Utiliza el constructor *Parábola,*$\longrightarrow$ *Foco y directriz* del menú de cónicas para definir la parábola *con* que tiene por foco al punto F y directriz d. Pídele que deje traza y enciende **T** en la pantalla gráfica.
- Define una animación de P de 0 a 10 y ejecútala.
- Mueve el punto F y observa la familia que se obtiene.

9. **Familia de parábolas**

   Familia de parábolas con foco en el eje X y directriz paralela al eje Y.

   - Define un escalar directo t.
   - Construye el punto calculado F de coordenadas $(t, 0)$.
   - Construye la recta calculada d con coeficientes $A = 1$, $B = 0$ y $C = -t - 5$.
   - Dibuja la parábola p con foco F y directriz d. Pídele que deje traza.
   - Construye una animación de t de 0 a 10.

10. **Familia de parábolas**

    Familia de parábolas con foco dado $F\,(3, 5)$ y directriz paralela al eje X.

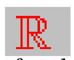
    - Define un escalar directo t.
    - Construye el punto directo $F\,(3, 5)$.
    - Construye la recta calculada d con coeficientes $A = 0$, $B = 1$, $C = t$.
    - Construye la parábola p con foco F y directriz d. Pídele que deje traza.
    - Define una animación de t de 0 a 10.
    - Ejecuta la animación.

9 Elipse

En esta sección mostramos algunas maneras de construir elipses y operaciones que se pueden hacer con ellas.

1. **Elipse dados los focos y el semieje mayor**.

   Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F1(5,0)$ y $F2(-5,0)$, y tal que la suma de las distancias de los puntos de ella a los focos sea 12.

   - Construye los focos y el escalar $a = 6$.
   - Utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas para construir la elipse *eli* con focos $F1$ y $F2$ y radio focal a. ¿Qué pasa si haces $a = 3$?
   - Vuelve a poner $a = 6$ y en la pantalla de datos analíticos, pon el cursor sobre el renglón de la elipse y oprime el botón *Datos* para ver todos los elementos de la elipse.
   - Localiza el centro de la elipse.
   - Dibuja el eje focal y después encuentra los vértices.
   - Encuentra el eje conjugado y los puntos de intersección de este eje con la cónica.
   - Dibuja las directrices.
   - En el ícono  *Define escalares*, elige *Escalares* y del menú *Escalares de una cónica*. Encuentra los semiejes focal y conjugado. La semidistancia focal y la excentricidad de la elipse.

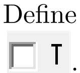
2. **Elipse dados los focos y un punto**.

   Encontrar la elipse cuyos focos son $F1\,(1,1)$ y $F2\,(-3,-1)$ y que pasa por el punto $P\,(2,3)$.

   - Construye los tres puntos.
   - Utiliza el constructor *Elipse, focos y punto* del menú de cónicas para encontrar la elipse con focos $F1$, $F2$ y que pasa por el punto P.

3. **Elipse dados centro y semiejes**.

   Encontrar la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen y que satisface que el semieje mayor mide 5 y el menor mide 3. Sugerencia: Usa el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c y con él encontrar los focos.

   - Define escalares directos $a = 5$ y $b = 3$.
   - Define el escalar calculado $c = sqrt\,(a * a - b * b)$.
   - Construye los puntos calculados $F1 = (c,0)$ y $F2 = (-c,0)$.
   - Utiliza la construcción *Focos y a* del menú de cónicas para construir la elipse *eli* con focos $F1$ y $F2$ y radio focal a.
   - Define una animación del escalar a de 0 a 10 y activa la traza de *eli*. En la pantalla gráfica activa . Ejecuta la animación.

4. **Elipse dada la ecuación**.

   Dibuja la elipse cuya ecuación es $4x^2 + y^2 - 36 = 0$.

   - Utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas llenando los coeficientes $A...F$ con los valores adecuados.

5. **Elipse dada la ecuación**.

   Dibuja la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0$ y encuentra las coordenadas de los focos, centro, vértices.

   - Construye la elipse *eli* con ecuación $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0$.
   - Utiliza el constructor *Puntos de una cónica* del menú de puntos para construir los focos $F1$, $F2$ y el centro C.
   - Construye la recta ℓ que pasa por los focos.
   - Construye los puntos $V1$ y $V2$ de intersección de ℓ con la elipse.

6. **Familias de elipses**.

   Encuentra las elipses con focos en $F1\,(-5, 0)$ y $F2\,(5, 0)$ variando la excentricidad en $0 < e < 1$. Geolab no tiene constructor para Focos y excentricidad, pero sí tiene para Focos y a. Sabiendo que $c = 5$, podemos encontrar a ya que $a = c/e$.

   - Define dos escalares directos $c = 5$ y $e = 0.5$.
   - Construye los focos como puntos calculados $F1\,(-c, 0)$ y $F2\,(c, 0)$.
   - Construye el escalar calculado $a = c/e$.
   - Dibuja la cónica con estos focos y el valor de a.
   - Anima el número e entre 0.01 y 0.99.
   - Ejecuta la animación indicando que la cónica deje traza.

7. **Intersección de elipses**.

   Encuentra el círculo que pasa por los puntos donde se cortan las elipses cuyas ecuaciones son $11x^2 + 36y^2 - 360 = 0$ y $100x^2 + 50y^2 - 960 = 0$.

   - Construye las elipses como cónicas calculadas.
   - Usando el constructor *Intersección de cónicas* del menú de puntos para encontrar las cuatro intersecciones de ellas.
   - Dibuja el círculo que pasa por tres de ellas (circuncírculo) y observa que pasa por el cuarto punto.

8. **Elipse por 5 puntos**.

   Construye la elipse que pasa por $P\,(1, 0)$, $Q\,(3, 2)$, $R\,(-1, 3)$, $S\,(3, 3)$, $T\,(-2, -1)$.

   - Construye los cinco puntos.
   - Utiliza el constructor *Cónica por cinco puntos* del menú de cónicas.

9. **Tangente a una elipse**.

   Utiliza la elipse del ejercicio anterior.

   - Construye el punto $W\,(0, -3)$.
   - Utiliza el constructor *Tangente a cónica* $\longrightarrow$ *Mismo lado de un punto* del menú de rectas para construir la tangente $tan1$ a la elipse desde el punto W que está del mismo lado que el punto P.
   - Construye también la tangente $tan2$ que está del otro lado de P.

10. **Elementos de la elipse**.

    Utiliza la elipse del ejercicio 9.

    Encuentra las intersecciones de las tangentes construidas en el ejercicio anterior con el eje focal de la cónica.

    - Utiliza el constructor *Rectas de una Cónica* $\longrightarrow$ *Eje Focal* del menú de rectas para construir ℓ el eje focal de la elipse
    - Construye las intersecciones de ella con las tangentes dadas.
    - Observa que usando los menús *Puntos de una Cónica*, *Rectas de una Cónica*, *Escalares de una Cónica* tienes posibilidad de acceder a todos los elementos importantes de la cónica.

11. **Elipse tangente a cinco rectas.**

    - Construye las rectas $y + 2 = 0$, $-x + y - 4 = 0$, $y - 4 = 0$, $x + 4y + 2 = 0$ y $2x + 2y - 2 = 0$.
    - Utiliza el constructor *Cónica tangente a cinco rectas* del menú de cónicas para construir la elipse tangente a las cinco rectas que dibujaste.

10 Hipérbola

En esta sección mostramos algunas maneras de construir hipérbolas y operaciones que se pueden hacer con ellas.

1. **Hipérbola dados los focos y el semieje mayor**.

   Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F1(5,0)$ y $F2(-5,0)$, y tal que la diferencia de las distancias de los puntos de ella a los focos sea 4.

   - Construye los puntos y el escalar $a = 2$.
   - Utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas para construir la hipérbola *hip* con focos $F1$ y $F2$ y radio focal a. ¿Qué pasa si haces $a = 6$?
   - En la pantalla de datos analíticos, pon el cursor sobre el renglón de la hipérbola y oprime el botón *Datos* para ver todos los elementos de la hipérbola.
   - Define una animación de a de 2 a 6, activa la traza de *hip* y la traza de la pantalla gráfica. Ejecuta la animación.

2. **Hipérbola dados los focos y un punto**.

   Encontrar la hipérbola cuyos focos son $F1\,(1,1)$ y $F2\,(-3,-1)$ y que pasa por el punto $P\,(2,3)$.

   - Construye los tres puntos.
   - Utiliza el constructor *Hipérbola, focos y punto* del menú de cónicas ara encontrar la hipérbola con focos $F1$, $F2$ y que pasa por el punto P.
   - Localiza el centro de la hipérbola.
   - Dibuja el eje focal y después encuentra los vértices.
   - Encuentra el eje conjugado.
   - Dibuja las directrices y las asíntotas.
   - Encuentra los semiejes focal y conjugado. La semidistancia focal y la excentricidad de la hipérbola.
   - Construye también la elipse con los mismos focos y que pase por P.

3. **Hipérbola dados centro y semiejes**.

   Encontrar la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen y que satisface que el semieje transversal mide 5 y el semieje no focal mide 3. Sugerencia: Usa el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c y con él encuentra los focos.

   - Define escalares directos $a = 5$ y $b = 3$.
   - Define el escalar calculado $c = sqrt\,(a * a + b * b)$
   - Construye los puntos calculados $F1 = (c, 0)$ y $F2 = (-c, 0)$.
   - Utiliza la construcción *Focos y a* del menú de cónicas para construir la hipérbola *hip* con focos $F1$ y $F2$ y radio focal a.

4. **Hipérbola dada la ecuación**.

   Dibuja la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

   - Utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas llenando los coeficientes $A...F$ con los valores adecuados.

5. **Hipérbola dada la ecuación**.

   Dibuja la hipérbola cuya ecuación es $3x^2 - y^2 - 18x + 2y + 23 = 0$ y encuentra las coordenadas de los focos, centro, vértices.

   - Construye la hipérbola *hip* con ecuación $3x^2 - y^2 - 18x + 2y + 23 = 0$.
   - Utiliza el constructor *Puntos de una cónica* del menú de puntos para construir los focos $F1$, $F2$ y el centro C.
   - Construye la recta ℓ que pasa por los focos.
   - Construye los puntos $V1$ y $V2$ de intersección de ℓ con la hipérbola.

6. **Familias de hipérbolas**.

   Encuentra las hipérbolas con focos en $F1\,(-5, 0)$ y $F2\,(5, 0)$ variando la excentricidad en $1 < e \leq 5$. Geolab no tiene constructor para Focos y excentricidad, pero sí tiene para Focos y a. Sabiendo que $c = 5$, podemos encontrar a ya que $a = c/e$.

   - Construye dos escalares directos $c = 5$ y $e = 2$.
   - Construye los focos como puntos calculados $F1\,(-c, 0)$ y $F2\,(c, 0)$.
   - Construye el escalar calculado $a = c/e$.
   - Construye la cónica con estos focos y el valor de a.
   - Anima el número e entre 1.01 y 5.
   - Ejecuta la animación indicando que la cónica deje traza.

7. **Intersección de hipérbolas**.

   Encuentra el círculo que pasa por los puntos donde se cortan las hipérbolas cuyas ecuaciones son $2x^2 - y^2 = 5$ y $-3x^2 + 6y^2 = 9$.

   - Construye las hipérbolas como cónicas calculadas.
   - Usando el constructor *Intersección de cónicas* del menú de puntos para construir las cuatro intersecciones de ellas.
   - Construye el círculo que pasa por tres de ellas (circuncírculo) y observa que pasa por el cuarto punto.

8. **Hipérbola por 5 puntos**.

   Construye la hipérbola que pasa por $P\,(-6, 7)$, $Q\,(-2, 6)$, $R\,(0, 1)$, $S\,(0, 7)$, $T\,(4, 6)$.

   - Construye los cinco puntos.
   - Utiliza el constructor *Cónica por cinco puntos* del menú de cónicas.

9. **Tangente a hipérbola**.

   Utiliza la hipérbola del ejercicio anterior.

   - Construye el punto $W\,(3, -3)$.
   - En elk menú de rectas elige *Tangente a cónica* $\longrightarrow$ *Mismo lado de un punto* para construir la tangente $tan1$ a la hipérbola desde el punto W que está del mismo lado que el punto P.
   - Construye también la tangente $tan2$ a la hipérbola desde el punto W que está del otro lado de P. ¿Puedes construir una tangente desde $K\,(-1, 1)$?

10. **Elementos de la hipérbola**.

    Utiliza la hipérbola del ejercicio 8.

    Encuentra las intersecciones de las tangentes construidas en el ejercicio anterior con el eje focal de la cónica.

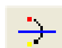
    - Utiliza el constructor *Rectas de una Cónica* $\longrightarrow$ *Eje Focal* del menú de rectas, para construir ℓ el eje focal de la elipse
    - Construye las intersecciones de ella con las tangentes dadas.

11. **Hipérbola tangente a cinco rectas.**

    - Construye las rectas $y + 2 = 0$, $-x + y - 4 = 0$, $-x + y + 2 = 0$, $x + 4y + 2 = 0$ y $2x + 2y - 2 = 0$.
    - Utiliza el constructor de cónicas, elige *Cónica tangente a cinco rectas*, para construir la hipérbola tangente a las cinco rectas que dibujaste.

11 Ecuación general

Cuando una cónica está fuera del origen y su eje focal no es paralelo a alguno de los ejes cartesianos, es dificil de analizar. En esta sección veremos cómo utilizar los constructores de transformaciones en el plano para llevar mediante rotaciones y traslaciones, una cónica al origen y de manera que su eje sea horizontal. De esta manera, su ecuación es mucho más sencilla de analizar y es facil encontrar todos sus parámetros.

1. **Traslaciones**.
    - Utiliza el constructor de conicas, elige del menú *Calculada*, para construir la cónica, w, cuya ecuación es: $16x^2 + 25y^2 - 32x + 150y - 159 = 0$.
    - Localiza el centro C de la cónica.
    - Define el punto $O\,(0,0)$.
    - Utiliza el constructor  *Define transformaciones* $\longrightarrow$ *Translación* para construir una traslación T que mande el punto C al punto O.
    - Utiliza el constructor de cónicas, elige del menú *Transformada* para construir la cónica trasladada s indicando que es la imagen de w bajo la transformación T. Cámbiale el color a esta nueva cónica.
    - ¿Qué ecuación tiene s? Comprueba que esta ecuación es la misma que obtienes si haces el cambio de variables $x = x' - 1$; $y = y' + 3$ en la ecuación original.
2. **Traslaciones.**

    Haz un ejercicio similar al anterior pero con la ecuación $y^2 - 8y - 4x + 8 = 0$.
    - Construye la parábola w con ecuación $y^2 - 8y - 4x + 8 = 0$.
    - Construye la traslación T que manda el vértice de la parábola al origen.
    - Construye la traslación s que es imagen de w bajo la transformación T.
3. **Rotaciones**.
    - Utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas para construir la cónica Q, cuya ecuación es:
    $$\frac{43}{4}x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}xy + \frac{57}{4}y^2 - 144 = 0.$$
    - En el constructor *Medida de ángulos* $\longrightarrow$ *Ángulo del eje de una cónica* del menú de escalares, llámalo A.
    - Define el punto $O\,(0,0)$.
    - Utiliza el constructor*Medida de ángulos* $\longrightarrow$ *Calculado* del menú de escalares. Llámalo B y definelo como $-A$. Verifica que el ángulo esté en radianes, de no ser así, haz click en Herramientas y en Unidades Angulares elige Radianes.
    - Utiliza el constructor *Define transformaciones* $\longrightarrow$ *Rotación centro ángulo* del menú de transformaciones para construir una rotación, R, con centro en O y ángulo B.
    - Construye la cónica transformada U indicando que es la imagen de Q bajo la transformación R. Cambia el color de esta cónica.
    - ¿Qué ecuación tiene U?, ¿la ecuación tiene término xy? ¿qué ángulo tiene respecto al eje X?
    - El ángulo 0.523599 radianes es igual a $30°$. Comprueba que obtienes la misma ecuación si haces el cambio de variables
    $$\begin{aligned} x &= x' \cos 30° - y' \operatorname{sen} 30° \\ y &= x' \operatorname{sen} 30° + y' \cos 30° \end{aligned}$$

4. **Rotaciones y traslaciones**.
    - Construye la cónica $5x - 2y + xy - 11 = 0$.
    - Siguiendo las ideas del ejercicio 3, gira la cónica para que sus ejes queden paralelos a los ejes cartesianos y después, trasládala para que su centro quede en el origen de coordenadas.
5. **Rotaciones y traslaciones**.
    - Usa la misma cónica que en el ejercicio anterior, pero ahora traslada primero el centro de la cónica al origen y después gírala para que sus ejes coincidan con los ejes de coordenadas.
    - ¿Usaste las mismas rotaciones y traslaciones que en el ejercicio 4?

Veremos ahora dos construcciones geométricas utilizando cónicas para resolver geométricamente ecuaciones de tercer y cuarto grado.

1. **Ecuación de cuarto grado**

   Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$.

   Para resolver esta ecuación hacemos el cambio de variable $y = x^2$, entonces la ecuación puede escribirse como:

   $$y^2 - 2xy - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

   o bien

   $$y^2 - 2xy - 13y + 14x + 24 = 0$$

   (a) Caso 1:
   Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ -13x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 24 &= 0. \end{aligned}$$

   Lo anterior equivale a encontrar los puntos de intersección de las cónicas.

   (b) Caso 2:
   Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ -2xy + y^2 + 14x - 13y + 24 &= 0. \end{aligned}$$

   Lo anterior equivale a encontrar los puntos de intersección de las cónicas.

   En ambos casos, si un punto está en la intersección de las cónicas, entonces su abscisa es solución de la ecuación original. Como a lo más hay cuatro puntos de intersección, hay a lo más cuatro soluciones de la ecuación.

    - Construye la cónica calculada p con ecuación $x^2 - y = 0$, es decir, $A = 1$, $2E = -1$ y el resto de los coeficientes iguales a cero.
    - Construye la cónica calculada q con ecuación $bx^2 + axy + y^2 + cx + d = 0$. Cambia el color de la cónica.
    - Construye los puntos de intersección de las cónicas $P1$, $P2$, $P3$, $P4$.
    - Ve a la pantalla de datos y oprime el botón de datos cartesianos para ver las abscisas de los puntos, es decir, las raíces de la ecuación.

- Haz la construcción del caso 2
- Llama $Q1$, $Q2$, $Q3$ y $Q4$ a los puntos de intersección de las cónicas.
- Compara las abscisas de los puntos con las abscisas de los puntos del caso 1.

2. **Ecuación de tercer grado**

   Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

   Para resolver esta ecuación hacemos el cambio de variable $y = x^2$, entonces la ecuación puede escribirse como:

   $$xy + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

   o bien

   $$xy + 2y - 5x - 6 = 0$$

   (a) Caso 1:
   Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ 2x^2 + xy - 5x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

   Lo anterior equivale a encontrar los puntos de intersección de las cónicas.

   (b) Caso 2:
   Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ xy - 5x + 2y - 6 &= 0. \end{aligned}$$

   Lo anterior equivale a encontrar los puntos de intersección de las cónicas.

   En ambos casos, si un punto está en la intersección de las cónicas, entonces su abscisa es solución de la ecuación original.

   - Construye la cónica calculada p con ecuación $x^2 - y = 0$, es decir, $A = 1$, $2E = -1$ y el resto de los coeficientes iguales a cero.
   - Construye la cónica calculada q con ecuación $ax^2 + xy + bx + c = 0$. Cambia el color de la cónica.
   - Construye los puntos de intersección de las cónicas $P1$, $P2$, $P3$, $P4$.
   - Ve a la pantalla de datos y oprime el botón de datos cartesianos para ver las abscisas de los puntos, es decir las raíces de la ecuación.
   - Haz la construcción del caso 2
   - Llama $Q1$, $Q2$, $Q3$ y $Q4$ a los puntos de intersección de las cónicas.
   - Compara las abscisas de los puntos con las abscisas de los puntos del caso 1.

12 Ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones paramétricas permiten construir curvas mucho más generales que las cónicas. Las ecuaciones paramétricas de curvas en el plano son de la forma $(f(t), g(t))$. Podemos pensarlas como que describen la posición de un objeto movil en el momento t.

1. **Elipse paramétrica**.

   Dibuja la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = 2\operatorname{sen} t$.

   - Construye los escalares $a = 3$, $b = 2$ y $t = 0$.
   - Construye el punto calculado P, de coordenadas $x = a * \cos(t)$, $y = b * \operatorname{sen}(t)$
   - Construye la animación que mueve a t de 0 a 6.283.
   - Ejecuta la animación y observa cómo se mueve el punto P.
   - En la pantalla de datos, coloca el cursor en el renglón de P e indica que deje traza.
   - En la pantalla gráfica haz click en el botón **T** que aparece al lado izquierdo de la pantalla.
   - Ejecuta nuevamente la animación.

2. Usa la construcción del ejercicio anterior.

   - Construye el punto calculado, Q, cuyas coordenadas son $x = P.x$, $y = P.y$, es decir, $Q = P$.
   - En la pantalla de datos, haz click en el triangulito que aparece a la izquierda en el renglón de Q y arrastra el renglón de Q hasta arriba, para que sea el primer objeto construido. Indica que Q deje traza.
   - Vuelve a ejecutar la animación, y observa que los puntos Q y P se mueven sobre la elipse, pero el punto Q va un paso atrás, esto es por haberlo puesto en el primer renglón.
   - Construye el segmento, s de P a Q e indica que deje traza.
   - Ejecuta la animación y ve cómo se pinta la elipse.
   - Puedes quitarle la traza a los puntos para ver únicamente la curva.
   - Experimenta con otros valores de b, ¿qué pasa si b es negativa?

3. Usa la construcción del ejercicio anterior.

   - Modifica la definición del punto P que construiste en el ejercicio 1, utiliza:
     $x = 5 + a * \cos(t)$, $y = -3 + b * \operatorname{sen}(t)$. ¿cuál es el centro de esta elipse?

4. Usa la construcción del ejercicio anterior.

   Modifica la definición del punto P, utiliza $x = a/\cos(t)$, $y = b * \tan(t)$.

   Ejecuta la animación.Observa que la hipérbola aparece con las asíntotas, ya que hay que cambiar el intervalo donde se mueve t. Modifica la animación y pon que t se mueve entre $-\pi/2 \approx -1.57$ y $\pi/2 \approx 1.57$. Con esto se dibuja una de las ramas de la hipérbola.

   Para dibujar la otra rama de la hipérbola, define otra animación de manera que t se mueva entre $\pi/2 \approx 1.58$ y $3\pi/2 \approx 4.712\,4$. Observa que no empezamos en 1.57 para no pasar por $\pi/2$ que es donde no están definidas la secante y la tangente.

5. **La catenaria**

   - Define los escalares directos $a = 2$ y t con cualquier valor.

- Define el punto calculado P como

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= a * \cosh(t/a) - a \end{aligned}$$

- Anima el escalar t de -5 a 5.
- Ve a la pantalla gráfica, ejecuta la animación y observa la curva que describe un cable que cuelga de dos puntos. La curva se llama catenaria. Dibuja los ejes coordenados y observa que el vértice de la catenaria pasa por el origen.

6. **Comparando la catenaria con la parábola**

   Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

   Observa que la gráfica de la catenaria parece una parábola. Vamos a comparar la catenaria con una parábola cuyos extremos y vértice coinciden.

   - La parábola debe tener ecuación $f(x) = y = kx^2$.

     Para que valga lo mismo que la catenaria en -5 y 5, hacemos:

     $$f(5) = k(25) = a * \cosh(5/a) - a$$

     de donde

     $$k = \frac{a * \cosh(5/a) - a}{25}.$$

   - Definimos k, escalar calculado como:

     $$1/25 * (a * \cosh(5/a) - a)$$

   - Definimos c, cónica calculada con $A = k$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = -1$, $F = 0$.
   - Modificando el valor de a, vemos que si a es más grande, la catenaria y la parábola se parecen más

7. **Comparando la parábola, la catenaria y el círculo**

   Utiliza la construcción del ejercicio anterior.

   - Dale a a el valor de 2.
   - Define F como el foco de la parábola c.
   - Define un escalar calculado e, en la ventana escribe $2 * F.y$, es decir, dos veces la segunda coordenada de F.
   - Define un punto calculado O de coordenadas $(0, e)$
   - Define $c1$, círculo centro y radio, con centro en O y radio e.
   - Observa en la pantalla gráfica cuánto se parecen el círculo, la parábola y la catenaria cerca del origen.

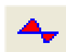
8. **Astroide**

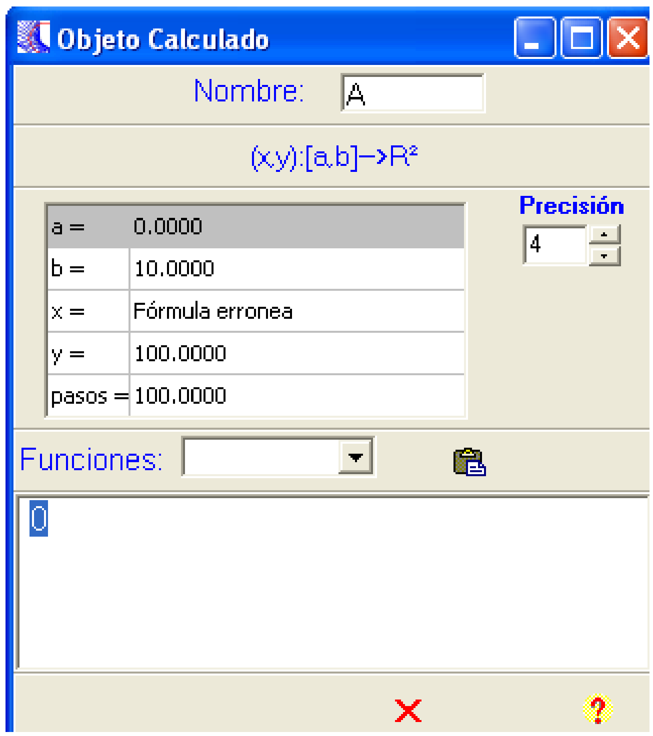
   - Construye un círculo c con definición directa.
   - Construye un punto A en el círculo c.
   - Define una animación. Anima A desde 0 hasta -3.
   - Construye un punto B en el círculo c.

- Llama la animación y utiliza la flecha para redefinirla, coloca B en el segundo renglón (debajo de la A), Inicio 0, Final 1.
- Traza la recta g que une a A con B y activa la traza.
- Ejecuta la animación.

Otra manera de dibujar curvas en ecuaciones paramétricas
Vamos a volver a dibujar algunas de las construcciones anteriores pero con otra herramienta de Geolab.

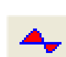
1. **Elipse paramétrica**.
   Dibuja la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t$.

   - Utiliza el ícono  *Define funciones* y del menú elige *Curva paramétrica*, aparece la siguiente ventana

   Los valores a y b son los extremos del intervalo donde queremos definir la función. En este caso

$$
\begin{aligned}
a &= 0 \\
b &= 2 * pi\_ \\
x &= 3 * \cos(t\_) \\
y &= 2 * \mathrm{sen}(t\_)
\end{aligned}
$$

2. Veamos como podemos utilizar el constructor  *Define funciones* para dibujar la curva del ejemplo 4. Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = 3/\cos(t)$, $y = 2 * \tan(t)$.

- En *Define funciones* elige del menú *Curva paramétrica* y en la ventana coloca los siguientes valores

$$\begin{aligned} a &= -pi\_/2 \\ b &= pi\_/2 \\ x &= 3/\cos(t\_) \\ y &= 2*\tan(t\_) \end{aligned}$$

  Esto sólo dibuja una rama de la hipérbola.

- Para dibujar la otra rama abrimos nuevamente elige del menú *Curva paramétrica* y en la ventana coloca los siguientes valores

$$\begin{aligned} a &= pi\_/2 \\ b &= 3*(pi\_/2) \\ x &= 3/\cos(t\_) \\ y &= 2*\tan(t\_) \end{aligned}$$

13 Ecuaciones polares

Para dibujar una curva expresada mediante una expresión polar $r = f(\theta)$, debemos obtener las ecuaciones paramétricas de la curva $x(t)$, $y(t)$ y después usar la técnica mostrada en los ejercicios de Geolab de la sección anterior. Dado que para convertir las coordenadas polares (r, θ) de un punto a coordenadas cartesianas (x, y) se utilizan las fórmulas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

las ecuaciones paramétricas de una curva $r = f(\theta)$ son

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta, \qquad y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

siendo θ el parámetro, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Utiliza el Geolab para hacer los siguientes ejercicios.

1. Dibuja la **rosa de tres pétalos** dada por $r = 8\operatorname{sen}(3\theta)$. Para ello, escribe las ecuaciones paramétricas de la rosa:

   $$x(\theta) = 8\operatorname{sen}(3\theta)\cos\theta, \qquad y(\theta) = 8\operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen}\theta$$

   como en Geolab no se pueden poner letras griegas como nombres de variables, usaremos t en lugar de θ.

   $$x(t) = 8\operatorname{sen}(3t)\cos t, \qquad y(t) = 8\operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen} t.$$

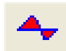
   - Construye un escalar directo t.
   - Construye un punto calculado A, haciendo $x = 8 * \operatorname{sen}(3 * t) * \cos(t)$ y $y = 8 * \operatorname{sen}(3 * t) * \operatorname{sen}(t)$.
   - Indica que A tiene traza.
   - Define una animación diciendo que t se va a mover de 0 a 6.28
   - En la pantalla gráfica haz click sobre la **P** que se encuentra en la barra del lado izquierdo de la pantalla para activar el plano polar.
   - Ejecuta la animación, observa que el punto A se mueve sobre los tres pétalos de la rosa dos veces. ¿por qué dos veces?
   - Corrige la animación diciendo que t se va a mover de 0 a 3.14
   - Para ver la curva completa y no nada más puntos aislados, define un punto calculado B de manera que su coordenada x sea $A.x$ y su coordenada y sea $A.y$
   - En la pantalla de datos analíticos, arrastra el renglón donde está B al primer lugar de la lista.
   - Define un segmento s de A a B.
   - Indica que la parte interior deje traza y haz invisible la parte exterior,
   - Ejecuta la animación.

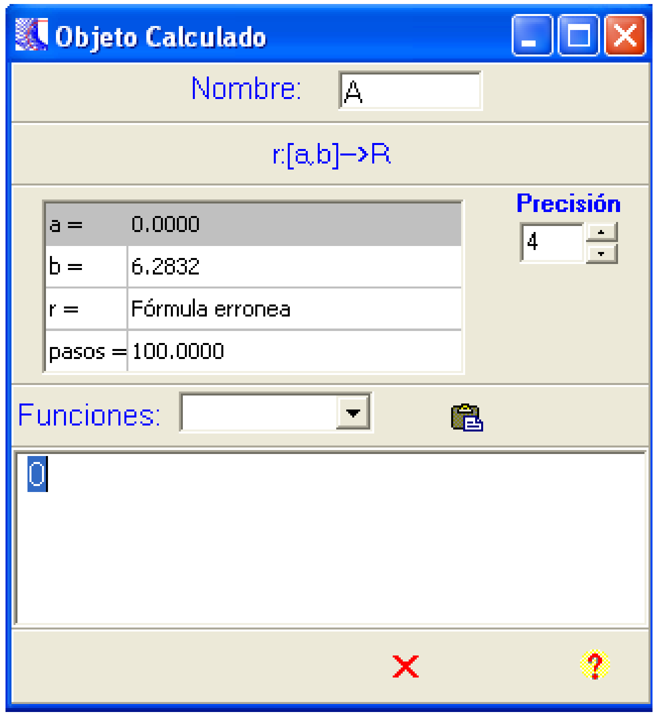
   Dibuja cada una de las siguientes curvas. Para ello puedes utilizar la construcción anterior modificando las coordenadas de A.

2. Dibuja la rosa de 5 pétalos dada por $r = 3\cos 5t$.

3. Dibuja la rosa de 8 pétalos dada por $r = 6\operatorname{sen} 4t$. Cambia la animación de t debe ir de 0 a 6.28 y debes pedirle al menos 150 pasos.

- Otra manera de dibujar gráficas de funciones polares.

  Utiliza el ícono  *Define funciones* $\longrightarrow$ *Curva polar*

  En este caso no modificamos a y b, los extremos del dominio de la función y en el lugar de r escribimos

  $$6 * \text{sen}(4 * t\_)$$

  Podemos modificar el número de pasos a 200 para mejorar la gráfica.

4. Dibuja la espiral logarítmica $r = e^t$.
5. Dibuja la espiral $r = \dfrac{t}{2}$. Cambia la animación de t debe ir de 0 a 20.
6. Dibuja la espiral parabólica $r = \sqrt{t}$, $r = -\sqrt{t}$.
7. Dibuja la espiral hipebólica $r = \dfrac{1}{t}$.
8. Dibuja el caracol $r = 2 + 6 \operatorname{sen} t$. Cambia la animación de t debe ir de 0 a 6.28
9. Dibuja el caracol $r = 3 - 3\cos t$.
10. Dibuja el caracol $r = 4 + 3 \operatorname{sen} t$.
11. Dibuja la concoide de Nicómedes $r = 3 + 3\sec t$. Observa que Geolab no tiene definida la secante, entonces debemos escribirla como $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$.
12. Dibuja la concoide de Nicómedes $r = 6 + 4\sec t$.
13. Dibuja la concoide de Nicómedes $r = 2 + 5\sec t$.

14. Haz la construcción de la lemniscata $r = \sqrt{8 \operatorname{sen} 2t}$. Las coordenadas del punto calculado A deben ser

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sqrt}(8 * \operatorname{sen}(2 * t)) * \cos(t) \\ y &= \operatorname{sqrt}(8 * \operatorname{sen}(2 * t)) * \operatorname{sen}(t). \end{aligned}$$

- Define una animación de t de 0 a 1.57.
- Después pide una animación nueva de t de 3.1416 a 4.71.
- En la pantalla gráfica abre la barra de animación y ejecuta primero la animación 1 y sin borrar ejecuta la animación 2

15. Dibuja la espiral parabólica $r = \sqrt{\dfrac{9}{t}}$.

14 Lugares geométricos

Un lugar geométrico en el plano es el conjunto de puntos que cumple una o varias condiciones geométricas, normalmente dadas por ecuaciones o desigualdades. Geolab permite generar lugares geométricos a manera de laboratorio utilizando las herramientas de animaciones y muestreos.

En esta sección veremos algunos ejemplos de ello.

1. Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de los puntos $A(-5, 2)$ y $B(1, 4)$.

   - Construye los puntos $A(-5, 2)$ y $B(1, 4)$.
   - Define un escalar directo $r = 5$.
   - Construye un círculo $c1$ con centro en $A(-5, 2)$ y radio r, y otro $c2$ con centro en $B(1, 4)$ y radio r.
   - Encuentra el punto de intersección P de los dos círculos.
   - Define una animación del escalar r de 0 a 20. Activa la traza de P y ejecuta la animación
   - Construye la otra intersección Q de los círculos como punto de intersección de los círculos $c1$ y $c2$ del otro lado de P. Activa la traza de Q.
   - Ve a la pantalla gráfica, activa el botón **T** de traza y ejecuta la animación.
   - Observa que parece que la traza que dejaron los puntos P y Q es la recta mediatria del segmento AB.
   - Construye la mediatriz de A a B. Observa que los puntos de la animación están sobre esta recta.

2. En el triángulo cuyos vértices son $A(7, 0)$, $B(0, 10)$ y $C(-4, 0)$ encontrar el lugar geométrico que describen los centros de los rectángulos inscritos en ese triángulo y que tienen uno de sus lados sobre el lado AC.

   - Construye un triángulo con vértices $A(7, 0)$, $B(0, 10)$ y $C(-4, 0)$ y lados opuestos a estos vértices a, b, c.
   - Construye un punto F en el segmento AC.
   - Construye una recta d perpendicular a b que pasa por F.
   - Encuentra el punto de intersección E de las rectas a y d.
   - Traza la recta e paralela a b desde E.
   - Construye el punto de intersección D de las rectas e y c.
   - Traza una recta f perpendicular a e que pasa por D.
   - Llama M al punto medio del segmento DF. Activa la traza de M y en la pantalla gráfica arrastra F para ver qué figura describe.
   - Observa que este segmento pasa por el punto medio de AC, para verificarlo construye el punto medio N de dicho segmento.
   - Construye el segmento g que pasa por M y N. Observa que los puntos de la traza de M están sobre este segmento.
   - Define una animación de F de 0 a 0.365 y ejecútala.

3. Consideremos el triángulo cuyos vértices son $A(3, 0)$, $B(0, 7)$ y $C(-9, 0)$. Sea E cualquier punto en el lado AC. Trazamos la recta paralela al lado AB que pasa por E y llamamos D al punto en el que se cortan dicha recta y el lado BC. Encuentra el lugar geométrico del punto M de intersección de AD y BE al variar el punto E.

- Construye el triángulo con vértices $A\,(3,0)$, $B\,(0,7)$ y $C\,(-9,0)$, llama a, b y c a sus lados.
- Construye un punto E en el segmento AC.
- Traza la recta d paralela a c que pasa por E.
- Construye el punto D de intersección de la recta d con el lado a.
- Construye la recta e que pasa por A y D.
- Construye la recta f que pasa por B y E.
- Construye el punto M de intersección de e y f. Pide a M que deje traza.
- Construye una animación de E de 0 a 1.
- Ejecuta la animación para el ver el lugar geométrico.
- Encuentra el punto medio del lado c y traza el segmento que pasa por este punto medio y por el vértice C.

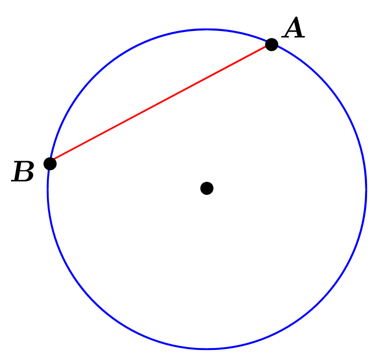
4. Encontrar el lugar geométrico del vértice $P\,(x,y)$ de un ángulo recto si sus lados pasan por los puntos $A\,(-5,-1)$ y $B\,(3,5)$.

   - Construye los puntos directos $A\,(-5,-1)$ y $B\,(3,5)$.
   - Construye el escalar directo $r=1$.
   - Traza un círculo $c1$ con centro en A y radio r.
   - Construye un punto D en el círculo $c1$.
   - Traza una recta a que pasa por A y D.
   - Traza la recta b perpendicular a a y que pasa por B.
   - Llama P a la intersección de las rectas a y b. Activa la traza de P.
   - En la pantalla gráfica ve que si mueves D el lugar geométrico descrito por P es un círculo cuyo diámetro es AB.
   - Anima D de 0 a 0.5 y ejecuta la animación.
   - Encuentra el punto medio F del segmento AB y traza el círculo con centro en F y que pasa por A.

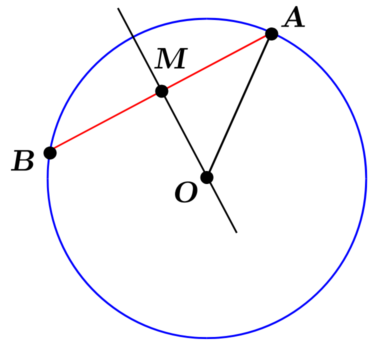
5. Encuentra el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de longitud 8 de un círculo de radio 5.

   Solución:

   Consideramos un círculo de radio 5 y una cuerda AB de longitud 8.



Encontramos el punto medio M de la cuerda y trazamos la recta perpendicular a AB que pasa por M. Esta recta pasa por el centro del círculo. Unimos A con O y consideramos el triángulo OMA.

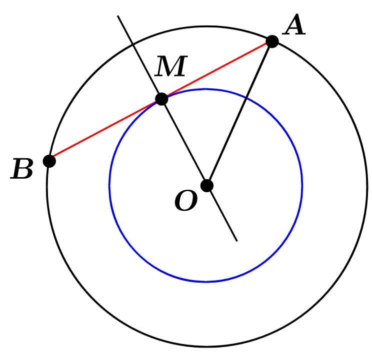


El triángulo OMA es rectángulo por ser OM perpendicular a AB.

Sabemos que $OA = 5$ por ser el radio del círculo O y $MA = 4$ ya que la cuerda mide 8 y M es el punto medio.

Por el teorema de Pitágogas tenemos que

$$\begin{aligned} OM^2 &= OA^2 - MA^2 \\ &= 25 - 16 \\ &= 9. \end{aligned}$$



Por tanto, el lugar geométrico está contenido en el círculo con centro en O y radio 3.

Construcción con Geolab.

- Construimos un círculo A con centro en el origen y radio 5.
- Colocamos un punto B en el círculo.
- Definimos un escalar $r = 8$.
- Trazamos el círculo C con centro en A y radio 8.
- Encontramos un punto de intersección D de los círculos A y C.
- Trazamos el segmento a determinado por los puntos B y D.
- Localizamos el punto medio E del segmento a y activamos la traza.
- Definimos una animación del punto B de 0 a 1.

- Activamos la traza de la pantalla gráfica y ejecutamos la animación.
- Definimos un escalar $s = 3$ y trazamos el círculo con centro en A y radio s.

6. Considerar la parábola $y^2 = 12\,(x+3)$ y el punto $P\,(2,0)$. Dado un punto $A\,(x_1, y_1)$ en la parábola, trazar por P una recta ℓ paralela a la recta tangente a la parábola en A. ¿Cuál es el lugar geométrico formado por el punto M en el que se cortan la recta ℓ y la recta que une a A con el foco de la parábola, conforme A se mueve a lo largo de la parábola?

   - Construye la cónica c calculada $y^2 - 12x - 36 = 0$.
   - Construye un punto A sobre la cónica c.
   - Traza la recta tangente t, a la cónica c que pasa por A.
   - Construye el punto $B\,(2,0)$.
   - Traza la recta paralela a a t por B.
   - Encuentra el foco F de la cónica c.
   - Traza la recta b que une a los puntos F y A.
   - Encuentra el punto de intersección M de las rectas a y b. Activa la traza de M.
   - Ve a la pantalla gráfica, activa el botón de traza y mueve el punto A. Observa que la traza que dibuja el punto M es un círculo con centro en F y que pasa por B.
   - Para verificar lo anterior, traza el círculo con centro en F y que pasa por B y observa que la traza del punto M se encuentra sobre este círculo pero no es todo el círculo.
   - Define una animación de A de 0 a 1 y ejecútala.
   - Ahora puedes mover el punto B sobre el eje X y observar la traza del punto M. Sigue siendo un círculo.
   - ¿Qué pasa si B no está en el eje X?

7. Dada la parábola $y^2 = 8\,(x+2)$ con foco en el origen, por cada punto Q en la parábola, considera la recta tangente a la parábola y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a dicha tangente. Describe el lugar geométrico formado por el punto de intersección de dichas rectas cuando Q recorre la parábola.

   - Construye la cónica c calculada $y^2 - 8x - 16 = 0$.
   - Construye un punto Q sobre la cónica c.
   - Traza la tangente t, a la cónica c que pasa por Q.
   - Construye el punto $O\,(0,0)$ y la recta ℓ perpendicular a la tangente t y que pasa por O.
   - Encuentra el punto de intersección M de las rectas ℓ y t. Activas la traza de M.
   - Ve a la pantalla gráfica, activa el botón de traza y mueve el punto Q. Observa que el lugar geométrico está contenido en la recta que pasa por el vértice de la parábola y es perpendicular al eje focal.
   - Para verificar esto último, en el ícono de recta, elegimos rectas de una cónica y después eje focal. Encontramos el punto de intersección de la cónica con el eje focal, este el vértice. Trazamos la recta perpendicular al eje focal y que pasa por el vértice. Observamos que la traza de M está sobre esta recta.

8. Un segmento AB de longitud 5, se apoya de manera que A esté en el semieje positivo X y B en el semieje positivo Y. Determinar el lugar geométrico descrito por el punto M del segmento que está a 3 unidades de A. Observa que A se mueve en la dirección positiva del eje X.

   Resolver este problema es equivalente a describir la trayectoria de un punto que se encuentra sobre una escalera apoyada verticalmente en un muro, a medida que se desliza hasta llegar al suelo.

- Construye un escalar directo t.
- Construye dos punto calculado $A\left(\sqrt{25-t^2},0\right)$ y $B\,(0,t)$.
- Traza a, el segmento que une a los puntos A y B.
- Si queremos un punto M que esté en el segmento AB y que diste de A tres unidades, ese punto dividirá al segmento en la razón
$$\frac{AM}{MB}=\frac{3}{5-3}=1.5$$
entonces debemos primero definir un escalar que valga 1.5 para después utilizarlo como razón.
- Definimos un escalar directo $r=1.5$
- En el icono de punto, elegimos *División de un segmento*. Lo llamamos M que es el punto que divide al segmento AB en la razón r. Activamos la traza de M.
- Definimos una animación de t de 5 a 0.
- En la pantalla gráfica activamos la animación y el botón de traza que se encuentra a la izquierda de la pantalla y observamos la traza de M.
- Verifica que es la cuarta parte de la elipse vertical $9x^2+4y^2-36=0$.

9. Consideramos las rectas $y=x$ y $y=-x$. Tomamos los puntos $A(4,0)$, $P(1,3)$ y $P1(1,-3)$. Por A trazamos una recta cualquiera ℓ que corte a la recta $y=x$ en el punto C y a la recta $y=-x$ en el punto $C1$. Unimos P con C y $P1$ con $C1$ y llamamos M al punto de intersección de estas rectas. Encontrar el lugar geométrico descrito por M cuando la recta $CAC1$ gira alrededor de A.

   - Define los puntos directos $A(4,0)$, $P(1,3)$ y $P1(1,-3)$.
   - Define un escalar directo r de valor 1.
   - Construye un círculo cir, con centro en A y radio r. En la ventana **Nivel** sustituye el 3 por el 5.
   - Define Q punto en el círculo cir. En la ventana **Nivel** escribe 5.
   - Dibuja la recta ℓ que une a los puntos A y Q.
   - Define las rectas $\ell1$: $A=1$, $B=-1$, $C=0$ (ésta es la recta $y=x$) y $\ell2$: $A=1$, $B=1$, $C=0$ (ésta es la recta $y=-x$)
   - Llama C al punto de intersección de las rectas ℓ y $\ell1$.
   - Llama $C1$ al punto de intersección de las rectas ℓ y $\ell2$.
   - Dibuja las rectas $t1$ une a los puntos C y P y $t2$ que une a los puntos $C1$ y $P1$.
   - Define M el punto de intersección de las rectas $t1$ y $t2$. Pide a M que deje traza.
   - Construye una animación de Q de 0 a 0.5. En la ventana PASOS escribe 360.
   - Ve a la pantalla gráfica, y apaga el nivel 5.
   - Prende los botones **T** y **E** en la pantalla gráfica para ver la traza y los ejes cartesianos.
   - Ejecuta la animación.
   - Ahora cambia los puntos P y $P1$. Escribe $P(3,5)$ y $P1(3,-5)$, regresa a la pantalla gráfica y ejecuta la animación.
   - Vuelve a la pantalla de construcción y cambia A, escribe $A(4.25,0)$, regresa a la pantalla gráfica y ejecuta la animación.
   - Por último vuelve a la pantalla de construcción y cambia A, escribe $A(5,0)$, regresa a la pantalla gráfica y ejecuta la animación,

10. Dibuja una recta L a una distancia b de un punto O. Por O traza una recta ℓ que corte a L en Q. ¿Cuál es el lugar geométrico, al variar ℓ, de los puntos P y $P1$ que están en ℓ y que distan a de Q?

- Define el punto directo $O\,(0,0)$.
- Construye el escalar directo $b = 2$.
- Define la recta calculada L: $A = 1$, $B = 0$ y $C = -b$.
- Dibuja un círculo c con centro en O y radio b.
- Construye un punto R en el círculo c.
- Dibuja la recta ℓ que une R y O.
- Encuentra el punto de intersección Q de L y ℓ.
- Define un escalar directo $a = 3$.
- Construye un círculo $c1$ con centro en Q y radio a.
- Determina el punto P de intersección de la recta ℓ con el círculo $c1$ del mismo lado de O. Pide que P deje traza.
- Construye el punto $P1$ de intersección de la recta ℓ con el círculo $c1$ del otro lado de O. Pide que $P1$ deje traza.
- Define una animación del punto R de 0 a 0.5 y ejecútala.
- Ahora cambia el valor de $b = 3$ y ejecuta la animación.
- Cambia el valor de $a = 2$ y ejecuta la animación.

15 Teoremas

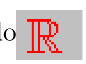
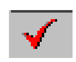
En esta sección analizaremos varios teoremas de la Geometría Clásica que pueden ser visualizados muy fácilmente mediante Geolab, y convencerse de que son ciertos, aunque no se haga la demostración formal.

1. **Teorema de Ceva**

   Si tres líneas AO, BO y CO, dibujadas por los vértices de un triángulo ABC y un punto O de su plano, cortan los lados opuestos en L, M y N respectivamente, entonces:

   $$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

   Construcción:

   - Dibuja un triángulo con vértices A, B, C y lados a, b y c.
   - Construye un punto directo O. Ve a la pantalla gráfica, si O coincide con alguno de los vértices, muévelo.
   - Construye los segmentos l, m y n que unen los puntos A con O, B con O y C con O respectivamente. Cambia el color a los segmentos que acabas de construir.
   - Construye los puntos L, M y N que son intersecciones de las rectas a y l, b y m, c y n, respectivamente.
   - Usando  elige *División de un segmento* llama rn a la razón en la que el punto N divide al segmento AB. De la misma manera llama rm a la razón en la que el punto M divide al segmento CA. De la misma manera llama rl a la razón en la que el punto L divide al segmento BC.
   - Usando  elige *Calculado* $\longrightarrow$ *Escalar*. En la ventana que aparece, escribe, en  Ceva, y en la ventana inferior, escribe $rn * rm * rl$, oprime 
   - Ahora, coloca el cursor en el último renglón de la construcción, es decir, sobre el escalar llamado Ceva y observa su valor en la ventana correspondiente a $x =$.
   - Una vez comprobado el resultado en el triángulo que construiste. Ve a la pantalla gráfica y mueve uno o más de los vértices. Vuelve a la pantalla de construcción y vuelve a ver el valor correspondiente al renglón Ceva.

2. **Recíproco del teorema de Ceva**

   Si L, M y N son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para los cuales se satisface que

   $$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{BL}{LC} = 1$$

   entonces AL, BM y CN son concurrentes.

   Construcción:

   - Se construye un triángulo ABC con lados a, b y c.
   - Construye el punto L en el segmento BC, el punto M en el segmento CA y el punto N en el segmento AB.
   - Traza los segmentos LA, BM y CN.
   - En el menú de escalares, elige *División de un segmento* para construir $r1$ como la razón en la que el punto N divide al segmento AB.

- De manera similar construye $r2$ la razón en la que el punto L divide al segmento BC y $r3$ la razón en la que el punto M divide al segmento CA.
- Construye el escalar calculado r como $r1 * r2 * r3$.
- En la pantalla gráfica arrastra alguno de los puntos L, M o N hasta que r valga 1 y observa que las tres rectas son concurrentes.

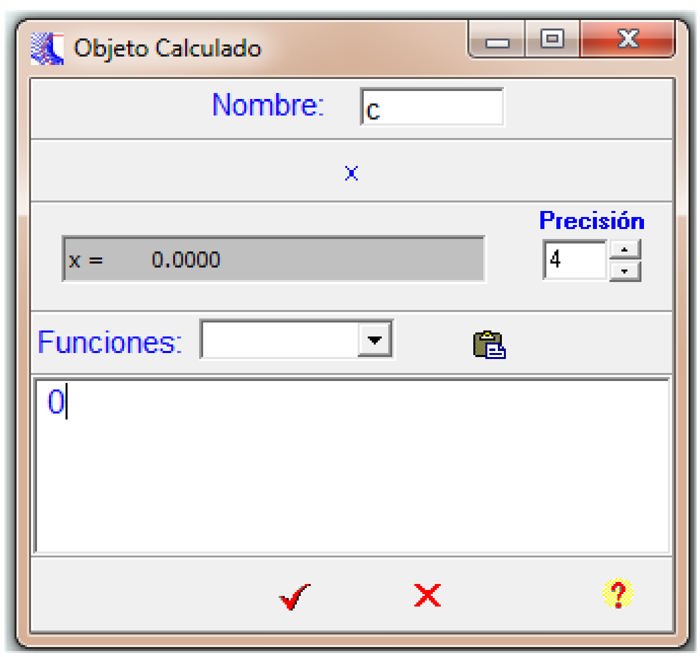
3. **Teorema de Menelao.**

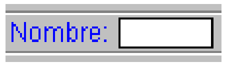
   Si una recta corta a las rectas que contienen a los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC en los puntos L, M y N, respectivamente, entonces

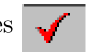
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

   Construcción:

- Dibuja un triángulo con vértices A, B, C y lados a, b y c. Puedes usar alguno que hayas hecho anteriormente.
- Usando elige *Definición directa* llámale l (En este caso, la recta debe ser de la forma $Ax+By=C$) escribe los coeficientes en las ventanas correspondientes, cámbiala de color haciendo un click en la flecha que se encuentra a la derecha de la casilla **color**. Ve a la pantalla gráfica y verifica que la recta corta a los tres lados del triángulo o a sus prolongaciones, de no ser así, selecciónala en la barra que aparece a la derecha de la pantalla y muévela de manera que corte a los tres lados o sus prolongaciones.
- Usando elige *Intersección de* $\longrightarrow$ *Intersección de rectas* llama L a la intersección de las rectas l y a. Repite el proceso llamando M y N a las intersecciones de l con b y c respectivamente.
- Usando elige *División de un segmento* llama rn a la razón en la que el punto N divide al segmento AB. De la misma manera llama rm a la razón en la que el punto M divide al segmento CA. De la misma manera llama rl a la razón en la que el punto L divide al segmento BC.
- Usando elige *Calculado* $\longrightarrow$ *Escalar*. En la ventana



escribe r en 

, en la ventana inferior, escribe $rn * rm * rl$ y después 

- Ahora, coloca el cursor en el último renglón de la construcción, es decir, sobre el escalar llamado r y observa su valor en la ventana correspondiente a $x =$
- Una vez comprobado el resultado en el triángulo que construiste. Ve a la pantalla gráfica y mueve uno o más de los vértices. Vuelve a la pantalla de construcción y vuelve a ver el valor correspondiente al renglón r. El valor de r debe ser -1.

4. **Recíproco del teorema de Menelao**

Si L, M y N son puntos de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para el cual vale la relación

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1,$$

entonces L, M y N son colineales.

Construcción:

- Se construye un triángulo ABC con lados a, b y c.
- Construye el punto L en el segmento BC, el punto M en el segmento CA y el punto N en el segmento AB.
- Elige *División de un segmento* en el menú de puntos para construir $r1$ como la razón en la que el punto N divide al segmento AB.
- De manera similar construye $r2$ la razón en la que el punto L divide al segmento BC y $r3$ la razón en la que el punto M divide al segmento CA.
- Construye el escalar calculado r como $r1 * r2 * r3$.
- Construye la recta que pasa por M y N.
- En la pantalla gráfica arrastra alguno de el punto L hasta que r valga -1 y observa que los tres puntos son colineales.

5. **Teorema sobre la bisectriz de un ángulo**

La bisectriz de un ángulo en un triángulo, divide al lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo.

Construcción:

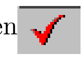
- Construye un triángulo ABC, cuyos lados son a, b y c.
- Traza la bisectriz ℓ de los lados b y c.
- Llama L al punto de intersección de las rectas ℓ y a.
- Define las distancias AB, CA, BL y LC.
- Calcula los escalares $d = BL/LC$ y $e = AB/CA$ y compáralos.

6. **Teorema de Pitágoras**

Si ABC es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Construcción:

- Define dos puntos directos A y C.
- Construye el segmento b que une a los puntos C y A.

- Traza la recta $l1$ perpendicular a la recta b que pasa por C.
- Encuentra un punto B en la recta $l1$.
- Construye los segmentos a que une a los puntos B y C y b que une a los puntos A y B.
- Traza el círculo $c1$ con centro en A y que pasa por B.
- Construye la recta $l2$ perpendicular a la recta c que pasa por el punto A.
- Encuentra el punto de intersecciön F de la recta $l2$ con el círculo $c1$ del otro lado de C.
- Construye la recta $l3$ paralela a la recta c por el punto F.
- Encuentra la proyección G del punto B en la recta $l3$.
- Utiliza el constructor *Polígono* del menú de rectas. En la ventana **Número de vértices** escribe 4 y haz click en  . Llámalo $BAFG$, es el cuadrángulo de vértices B, A, F, G.
- Ahora construye el círculo $c2$ con centro en C y que pasa por el punto A.
- Determina el punto de intersección I de la recta a y el círculo $c2$, del otro lado de B.
- Construye la recta $l4$ paralela a la recta b por el punto I.
- Encuentra la proyección H del punto A en la recta $l4$.
- Determina el cuadrángulo $ACIH$ de vértices A, C, I, H.
- Traza el círculo $c3$ con centro en C y que pasa por B.
- Determina el punto de intersección J de la recta b y el círculo $c3$, del otro lado de A.
- Construye la recta $l5$ paralela a la recta a por el punto J.
- Encuentra la proyección K del punto B en la recta $l5$.
- Determina el cuadrángulo $CBKJ$ de vértices C, B, K, J.
- Traza la recta perpendicular $l6$ a la recta c por el punto C.
- Encuentra los puntos de intersección D de las rectas c y $l6$ y E de las rectas $l6$ y $l3$.
- Determina los cuadrángulos $DAFE$ de vértices D, A, F, E y $BDEG$ de vértices B, D, E, G.
- Utiliza el constructor *Área y perímetro* $\longrightarrow$ *Área de un polígono* del menú de escalares. Llámala $area1$ del polígono $DAFE$. De manera análoga define $area2$ del polígono $ACIH$, $area3$ del polígono $BDEG$ y $area4$ del polígono $CBKJ$.
- Compara las área de los polígonos.

7. **Teorema**

   Si A, B, C son puntos en una recta y si P, Q, R son los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente, probar que el punto medio de CR coincide con el de PQ.

   Construcción:

   - Define una recta directa ℓ y tres puntos A, B, C en ella.
   - Encuentra los puntos medios P, Q, R de BC, CA y AB.
   - Dibuja W, el punto medio de CR y V, el punto medio de PQ. Selecciona los objetos W y V para verlos en la pantalla gráfica.
   - Compara las coordenadas de W y V.
   - Mueve cualquiera de los puntos A, B o C y compara nuevamente las coordenadas de W y V.

8. **Teorema**

   Si A, B, C son puntos en una recta. ¿Qué debe suceder para que la ecuación $AB + BC - CA = 0$ sea cierta?

   Construcción:

   - Dibuja una recta directa ℓ y tres puntos A, B, C en ella.
   - Define las distancias AB, BC, CA.
   - Construye el escalar calculado $r = AB+BC-CA$ y selecciónalo para llevarlo a la pantalla gráfica.
   - Mueve los puntos para responder la pregunta.

9. **Teorema de Desargues**

   Si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de los lados correspondientes son colineales.

   Construcción:

   - Dibuja un triángulo con vértices A, B, C y lados opuestos a los vértices a, b y c. Cambia el color de los lados a color fuchia.
   - Construye un punto O fuera del triángulo.
   - Construye los segmentos OA, OB, OC.
   - Elige un punto $A1$, en el segmento que va de O a A.
   - Repite el proceso con los otros dos. Repite este paso con OB, llámalo $B1$, y con OC, llámalo $C1$.
   - Construye el segmento $A1B1$, llámalo $c1$; el segmento $B1C1$, llámalo $a1$ y segmento $C1A1$, llámalo $b1$. Pon los tres segmentos de color lima, esto lo puedes hacer marcando de amarillo los tres renglones y usando el botón de *Cambiar atributos gráficos.* Observa los triángulos en perspectiva.
   - Encuentra el punto de intersección de las rectas a con $a1$, llámalo P. El punto de intersección de b con $b1$, llámalo Q y el punto de intersección de c con $c1$, llámalo R.
   - Construye la recta ℓ que pasa por P y Q. Verifica en la pantalla gráfica que el punto R está sobre esta recta.

10. **Círculo de Apolonio**

    Encontrar el lugar geométrico de los puntos cuyas razones de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

    Construcción:

    - Construye dos puntos directos $O1$ y $O2$.
    - Define un escalar directo $r1$.
    - Construye en escalar calculado $r2 = 2 * r1$.
    - Dibuja los círculos $c1$ con centro en $O1$ y radio $r1$ y $c2$ con centro en $O2$ y radio $r2$.
    - Construye los puntos P y Q de intersección de los círculos $c1$ y $c2$. Pide que P y Q dejen traza.
    - Define una animación de $r1$ de 1 a 100 con 150 pasos.
    - Ejecuta la animación.

11. **Teorema**

    Si A, B, C, D son los vértices de un cuadrilátero cíclico convexo, cuyas diagonales se cortan en O, entonces $AB \cdot BC \cdot OD = CD \cdot DA \cdot BO$.

    Construcción:

    - Dibuja un círculo c cualquiera.
    - Define cuatro puntos A, B, C, D sobre el círculo c, ordenados en sentido positivo.
    - Traza las diagonales AC y BD.
    - Dibuja el punto de intersección O de las diagonales.
    - Calcula las distancias AB, BC, OD, CD, DA y BO.
    - Define los escalares calculados $p = AB * BC * OD$ y $q = CB * DA * BO$.
    - Selecciona los objetos p y q para verlos en la pantalla gráfica y compáralos.
    - Mueve los puntos A, B, C, D de manera que conserven el orden y compara nuevamente p y q.

    El siguiente teorema es un caso particular del teorema descubierto por Blas Pascal en 1639 a la edad de 16 años.

12. **Teorema de Pascal**

    Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en un círculo son colineales.

    Construcción:

    - Dibuja un punto P cualquiera y define un número r positivo.
    - Dibuja un círculo c con centro en P y radio r.
    - Coloca seis puntos sobre el círculo A, B, C, D, E, F.
    - Construye los segmento ab, bc, cd, de, ef, fa que unen los puntos A y B, B y C, C y D, D y E, E y F, F y A. Ellos son los lados del hexágono.
    - Llama Q al punto de intersección de las rectas ab y de, R al punto de intersección de las rectas bc y ef y S al punto de intersección de las rectas cd y fa.
    - Llama ℓ a la recta que pase por dos cualesquiera de los puntos Q, R y S. Cámbiala de color.
    - Ve a la pantalla gráfica y observa que el tercer punto está sobre la línea.
    - Mueve los vértices y observa que el resultado sigue cumpliéndose.

13. **Teorema de Pascal**

    Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica son colineales.

    Construcción:

    - Repite la construcción anterior utilizando una elipse construida con focos y a.
    - Ahora selecciona uno de los focos y muévelo hasta obtener una hipérbola.

14. **Teorema de Brianchon**

    Si un hexágono está circunscrito a una cónica, las diagonales que unen vértices opuestos son concurrentes en un punto.

    Construcción:

    - Construye una elipse c con focos y a.

- Construye tres puntos fuera de la elipse P, Q, R.
- Traza las tangentes a la cónica c desde los puntos P, Q, R (son seis tangentes). Estas son los lados del hexágono.
- Encuentra los puntos de intersección de las tangentes tomadas de 2 en 2 y los llamamos A, B, C, D, E, F. En este orden recorriendo el hexágono en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
- Traza los segmentos que unen los vértices opuestos del hexágono circunscrito ad, be, cf.
- Encuentra el punto de intersección de dos de las rectas anteriores y observa que el otro segmento también pasa por dicho punto.

15. **Teorema de Ptolomeo**

Un cuadrilátero cíclico es aquel cuyos vértices se encuentran sobre un círculo.

El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

Construcción:

- Dibuja un círculo c.
- Coloca cuatro puntos A, B, C, D sobre el círculo.
- Traza el segmento de recta AB y llámalo ab. De la misma manera traza BC, CD, DA.
- Calcula la distancia $d1$ entre el punto A y el punto C.
- Calcula la distancia $d2$ entre el punto B y el punto D.
- Construye un escalar calculado $q1$ con la fórmula $d1 * d2$
- Calcula la distancia $d3$ entre el punto A y el punto B.
- Calcula la distancia $d4$ entre el punto B y el punto C.
- Calcula la distancia $d5$ entre el punto C y el punto D.
- Calcula la distancia $d6$ entre el punto D y el punto A.
- Construye un escalar calculado $q2$ con la fórmula $d3 * d5 + d4 * d6$
- Compara las cantidades $q1$ y $q2$.

Ahora mueve los puntos del cuadrilátero de manera que se forme un rectángulo. ¿Qué observas?

16. **Teorema de Miquel**

Si D, E, F son tres puntos cualesquiera en los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, entonces los círculos que pasan por las tercias de puntos B, D, F; C, E, D; A, F, E; tienen un punto en común.

Construcción:

- Construye un triángulo con vértices A, B, C y lados opuestos a los vértices a, b y c.
- Construye un punto D en el segmento BC, un punto E en el CA y un punto F en el AB.
- Construye un círculo $c1$ que pase por B, D, F; un círculo $c2$ que pase por C, E, D; y un círculo $c3$ que pase por A, F, E.
- Construye el punto P intersección de los círculos $c1$ y $c3$ del otro lado de F, el punto Q intersección de los círculos $c1$ y $c2$ del otro lado de D y el punto R intersección de los círculos $c2$ y $c3$ del otro lado de E.
- Verifica que P, Q y R tienen las mismas coordenadas.

- Ahora, en la pantalla gráfica puedes mover los vértices o los puntos sobre los lados y observar si se siguen cortando los tres círculos.

17. **Teorema**

    Dado un triángulo ABC, y un punto M dentro del triángulo. Es posible elegir puntos D, E, F en los lados AB, CA, BC de manera que los círculos que pasan por las tercias de puntos B, D, F; C, E, F; A, D, E; se cortan en M.

    Construcción:

    - Dibuja un triángulo con vértices A, B, C y lados opuestos a los vértices a, b y c.
    - Construye un punto M y colócalo dentro del triángulo.
    - Elige un punto D en el lado AB.
    - Construye un círculo $c1$ que pase por A, M y D.
    - Construye la intersección E de la recta b con el círculo $c1$ del otro lado de A.
    - Construye un círculo $c2$ que pase por C, M y E.
    - Construye la intersección F fe la recta a con el círcu|o $c2$ del otro lado de C.
    - Construye un círculo $c3$ que"pase ror M,"B y F.

18. **Recta de Simson**

    Sean PX, PY, PZ las perpendiculares bajadas a los lados del triángulo ABC de cualquier punto P de su circunferencia circunscrita. Entonces los puntos X, Y, Z son colineales.

    Construcción:

    - Construye un círculo directo $c1$.
    - Construye tres puntos A, B, C sobre el círculo y los lados opuestos a estos puntos a, b y c
    - Construye el punto P en el círculo $c1$.
    - Define una animación, que anime P de 0 a 1.
    - Construye la proyección X del punto P en la recta a, la proyección Y del punto P en la recta b, la proyección Z del punto P en la recta c.
    - Traza la recta ℓ que une X con Y. Activa la traza. Observamos la figura que se forma en la pantalla gráfica al activar la animación.
    - Ahora borra la animación que tenías y define una nueva colocando A en el primer renglón, B en el segundo y C en el tercero. Pide que ejecute 100 pasos.
    - Ve a la pantalla gráfica cierra la animación que tenías y vuélvela a abrir. Para esta animación es conveniente que el triángulo sea escaleno para poder observar bien la figura que se forma. Si el círculo es pequeño hay que agrandarlo.

19. **Teorema de Feuerbach**

    El círculo de los nueve puntos de un triángulo es tangente al círculo inscrito y a cada uno de los círculos excritos del triángulo.

    Construcción:

    - Construye un triángulo ABC.
    - Ahora construye el círculo de los nueve puntos. Para ello, basta con encontrar los puntos medios de los lados del triángulo y traza el círculo que pasa por ellos.

- Construye el incírculo $c1$.
- Construye los excírculos $c2$, $c3$ y $c4$ de los lados abc, bca y cab.
- Ve a la pantalla gráfica y observa los puntos de tangencia.

20. **Teorema**

    El punto medio de un lado de un triángulo es también el punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto de dicho lado con el círculo inscrito y el correspondiente excrito.

    Construcción:

    - Construye un triángulo ABC.
    - Encuentra el punto medio M del lado AB.
    - Construye el incírculo del triángulo ABC.
    - Encuentra el punto de intersección N del incírculo con el lado AB.
    - Construye el excírculo del triángulo ABC en el lado AB.
    - Encuentra el punto de intersección P del excírculo con el lado AB.
    - ¿Cómo son las distancias NM y PM?
    - ¿Es el punto M punto medio del segmento NP?

21. Consideremos dos círculos con distintos radios y centro en O y O' respectivamente y que se cortan en dos puntos A y B. Sea M el punto medio del segmento OO'. Unir A con M y trazar la recta perpendicular a este segmento y que pasa por A. Esta recta corta a las circunferencias en C y D. Probar que $CA = AD$.

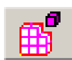
    Construcción:

    - Define dos puntos directos O y $O1$.
    - Define dos escalares directos r y $r1$.
    - Construye dos círculos. Uno de nombre cir con centro en O y r; y el otro $cir1$ con centro en $O1$ y $r1$. Si los círculos no se cortan, arrastra O hasta que suceda.
    - Encuentra el punto de intersección A de los dos círculos y el punto de intersección B del otro lado de A.
    - Localiza el punto medio M entre A y B.
    - Traza el segmento a que va de A a M.
    - Traza la recta b perpendicular al segmento a y que pasa por A.
    - Localiza los puntos de intersección C y D de la recta b con los círculos.
    - Encuentra las distancias de A a C y de A a D. ¿Cómo son estas distancias?

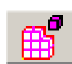
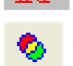
16 Muestreo

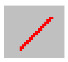
En esta sección continuamos con el estudio de lugares geométricos utilizando la técnica de muestreo y el álgebra booleana de condiciones lógicas.

1. Encuentra el lugar geométrico de un punto $A(x, y)$ que se mueve manteniendo una distancia de 6 del punto $B(2, -5)$.

   - Define un punto directo A y un punto directo $B(2, -5)$
   - En  elige *Escalares* $\longrightarrow$ *Distancia entre dos puntos* y define d la distancia de A a B.
   - Define un escalar directo a con valor de 6.
   - Se definen los escalares calculados vd como el valor absoluto de d, y va como el valor absoluto de a
   - En  del menú elige *Aritméticas* $\longrightarrow x < y$. En el **var1** coloca vd y en **var2** va
   - Marca el renglón en donde se encuentra definido A, y en la parte superior presiona el botón donde dice *Visible* con el botón derecho del ratón, y elige b
   - En  elige *Muestreo*. Oprime el botón de construcción nueva y en el menú que aparece elige *ventana* llámala v. Oprime la ceja **Muestreos**, oprime el botón de construcción nueva y en **Objetos de la muestra** marca el renglón que se encuentra debajo de **Nombre** y coloca A, marca el renglón debajo de **Región** y coloca v. En **Objetos con traza**, en el renglón que se encuentra debajo de **Nombre** coloca A.
   - Ve a la pantalla gráfica y ejecuta el muestreo usando el botón  En la barra que aparece en la parte inferior de la pantalla da click en la paloma azul. Puedes dar varios click sobre la paloma azul para que la región se cubra de puntos.

2. Dibujar la región que satisface las desigualdades $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 32 < 0$ y $x - y - 8 > 0$.

   - Define un punto directo P.
   - Declara el muestreo. En  elige *Muestreo*. Oprime el botón de construcción nueva y en el menú que aparece elige *ventana* llámala v. Oprime la ceja **Muestreos**, oprime el botón de construcción nueva y en **Objetos de la muestra** marca el renglón que se encuentra debajo de **Nombre** y coloca P, marca el renglón debajo de **Región** y coloca v. En **Objetos con traza**, en el renglón que se encuentra debajo de **Nombre** coloca P.
   - En  elige *Escalares* $\longrightarrow$ *Escalar calculado*, llámalo *cir* y defínelo como $P.x * P.x + P.y * P.y - 10 * P.x + 8 * P.y + 32$.
   - En  del menú elige *Aritméticas* $\longrightarrow x < a$. Llámala $c1$ y en el **var1** coloca *cir* y en **a** escribe 0.
   - Queremos que P se pinte sólo cuando se satisface la condición $c1$. Para ello en la pantalla de datos analíticos selecciona el renglón donde está definido P y en la barra superior presiona el botón donde dice *Visible* con el botón derecho del ratón, y elige $c1$.
   - Ve a la pantalla gráfica y ejecuta el muestreo usando el botón .
   - En  elige *Escalares* $\longrightarrow$ *Escalar calculado*, llámalo *rec* y defínelo como $P.x - P.y - 8$.
   - En  elige *Aritméticas* $\longrightarrow x > a$. Llámala $c2$ y en el **var1** coloca *rec* y en **a** escribe 0.

- En la pantalla de datos analíticos, cámbiale la condición de visibilidad a P para que sea visible de acuerdo a $c2$ y cámbiale el color.
- Ejecuta nuevamente el muestreo sin borrar el anterior.
- Como ahora queremos que se pinte la intersección de las dos regiones, entonces elige en  *Lógicas*, y del submenú elige a y b. Llámala $c3$ y en a escribe $c1$, en b escribe $c2$.
- En la pantalla de datos analíticos cámbiale la condición de visibilidad a P para que sea visible de acuerdo a $c3$ y cámbiale el color.
- Borra la pantalla gráfica y ejecuta nuevamente el muestreo.
- En  elige *Recta directa* y cámbiale los coeficientes $x - y - 8 = 0$.
- Contruye un punto directo $(5, -4)$ y un escalar directo 3 y el círculo con centro en este punto y con este radio. Observa como los puntos que dibujó el muestreo se encuentran dentro del círculo y debajo de la recta.