Demostrar que para $n>1$, se cumple la siguiente formula de reducción:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx$$

Demostración:

En primer lugar escribimos:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} \qquad (1)$$

Enseguida trabajamos con la integral en rojo de la expresión (1):

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{2x^2}{2(x^2+1)^n}dx = \int x\frac{2x}{2(x^2+1)^n}dx \qquad (2)$$

Resolvemos esta última integral en (2), por el método de integración por partes. Recuerda que: $\int fg' = fg - \int f'g$.

$$Si \begin{cases} f(x) = x \\ \quad y \\ g'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{(x^2+1)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ \quad y \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \end{cases}$$

Para obtener $g(x)$, basta utilizar el método de sustitución, haciendo $u = x^2+1$, de donde $du = 2xdx$ y por lo tanto:

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{1}{u^n}du = \int u^{-n}du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{u^{n-1}} = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$$

Aplicando el método de integración por partes, nos queda:

$$\int x\frac{2x}{2(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx \qquad (3)$$

Es decir, de (2) y (3), nos queda que:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1), nos queda:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx \quad (5)$$

Agrupando los términos semejantes en la expresión de la derecha en (5), nos queda:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{(1-n)}+1\right)\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx$$

Cambiando el signo en el denominador de la primera expresión del lado derecho y haciendo cuentas en la segunda, nos queda:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{(2n-2)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{3-2n}{2-2n}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx$$

Por último, cambiando el signo en el numerador y denominador de la segunda expresión del lado derecho, nos queda que:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{(2n-2)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx$$

Q.E.D.