Ejercicios para el tema de Continuidad

1. En cada uno de los siguientes casos, encontrar un δ tal que, $|f(x)-l|<\varepsilon$ para todo x que satisface $0<|x-a|<\delta$

i) $f(x)=x^2$; $l=a^2$

ii) $f(x)=\frac{1}{x}$; $a=1,\ l=1$

iii) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$; $a=1,\ l=2$

iv) $f(x)=\frac{x}{1+Sen^2x}$; $a=0,\ l=0$

v) $f(x)=\sqrt{|x|}$; $a=0,\ l=0$

vi) $f(x)=\sqrt{x}$; $a=1,\ l=1$

Los siguientes ejercicios los puedes consultar en el libro:
Cálculo de Arizmendi, Carrillo y Lara.

2. Determínese si las siguientes funciones son continuas en donde se indica:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2}-1 & x\geq 1\\ x^2-2x+1 & x\in[0,1]\end{cases}$ en $x_0=1$

b) $h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ en $x_0=0$

c) $g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x\in[0,1]\\ -\sqrt{1-(x-2)^2} & x\in[1,2]\end{cases}$ en $x_0=1$

d) $k(x)=\begin{cases}s(x) & x\in(a,b]\\ t(x) & x\in[b,c)\end{cases}$ en $x_0=b$

(Si $s(x)$ y $t(x)$ son continuas en b)

3. Usando directamente la definición de función continua, mediante el límite, demuestre que las funciones siguientes son continuas en el punto indicado.

a) $f(x)=3x-5$ en $x_0=1$

b) $g(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{3}$ en $x_0=-1$

c) $f(x)=3x^2-5x+1$ en $x_0=0$

d) $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3x}$ en $x_0=2$

e) $h(x)=\frac{2x^2-1}{3x+2}$ en $x_0=-1$

f) $k(x)=2x^3+x^2-x+3$ en $x_0=1$

g) $f(x)=\frac{1}{kx}$ en $x_0=1,\ k\neq 0$

h) $g(x)=[x]$ en $x_0=0.75$

i) $h(x)=|x-3|$ en $x_0=\frac{1}{2}$

j) $f(x)=\sqrt{2x-5}$ en $x_0=3$

(Ver ejemplo 1 de la página 105)

Los ejercicios siguientes los puedes consultar en el
Libro de Cálculo de M. Spivak.

4 Resuelva lo siguiente:

a) ¿Es cierto que si $|f|$ es continua, entonces f es continua?

b) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x| \ \forall \ x$. Demostrar que f es continua en 0. (Obsérvese que $f(0)$ debe ser igual a 0).

c) Dar un ejemplo de una función que no sea continua en ningún punto, excepto en $a=0$.

d) Si g es continua en 0, $g(0)=0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0.

e) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

f) Para todo número a, hallar una función que sea continua en a, pero que no lo sea en ningún otro punto.

h) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

i) Hallar una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

5. Supóngase que f satisface que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ y que f es continua en 0, demostrar que f es continua en a, $\forall \ a$.

6. a) Demostrar que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

b) Demostrar que toda función continua f puede escribirse como la suma de dos funciones continuas, una par y la otra impar.

c) Demostrar que si f y g son continuas, también lo son: $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$.

7. a) Supóngase que g y h son continuas en a, y que $g(a)=h(a)$. Defínase $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demostrar que f es continua en a.

b) Supóngase que g es continua en $[a,b]$, h es continua en $[b,c]$ y $g(b)=h(b)$. Sea $f(x)=\begin{cases} g(x) & si\ x\in[a,b] \\ h(x) & si\ x\in[b,c] \end{cases}$. Demostrar que $f(x)$ es continua en $[a,c]$. (Así pues las funciones continuas puede "soldarse").

8. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, pero es distinto de $f(a)$, entonces se dice que $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en a.

a) Si $f(x)=sen\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x\neq 0$ y $f(0)=1$, ¿Tiene f una discontinuidad evitable en 0?, ¿Y si $f(x)=x\ sen\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x\neq 0$ y $f(0)=1$?. Demostrar que toda función continua f puede escribirse como la suma de dos funciones continuas, una par y la otra impar.

b) Supóngase que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $f(x)=g(x)$ para $x\neq a$ y sea $g(a)=\lim_{x\to a} f(x)$. Demostrar que g es continua en a. (No tomarse demasiado trabajo; esto es muy fácil).

9. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n, tal que $f(x)=0$ para algún x entre n y n+1.

a) $f(x)=x^3-x+3$ b) $f(x)=x^5+5x^4+2x+1$

c) $f(x)=x^5+x+1$ d) $f(x)=4x^2-4x+1$

10. Demostrar que existe algún número x, tal que:

a) $\operatorname{sen} x = x - 1.$

b) $x^{179}+\dfrac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2 x}=119.$

c) $\cos(x)-\frac{1}{2}=x-1$

d) $(2x^2-2)^4=-x+1$

11. Supóngase que f y g son continuas en $[a,b]$ y que $f(a)<g(a)$, pero $f(b)>g(b)$. Demostrar que $f(x)=g(x)$ para algún $x\in[a,b]$. (Si la demostración no es muy corta es que no está bien).

12. Supóngase que f es una función continua en $[0,1]$ y que $f(x)$ está en $[0,1]$ para todo x. Demostrar que $f(x)=x$ para algún número x.

13. Sean f y g dos funciones tales que $f+g$ es continua en a. ¿Son f y g necesariamente continuas en a?

14. Sean f y g dos funciones tales que fg es continua en a. ¿Son f y g necesariamente continuas a?

Los siguientes ejercicios los puedes consultar en el libro: Cálculo de Arizmendi, Carrillo y Lara.

15. Sea $f:(a,b)\rightarrow R$ continua en $x_0 \in (a,b)$. Pruébese que si $f(x)>0$, entonces existe una vecindad de x_0 en donde f es positiva.

16. Vea si en los siguientes incisos se cumple el teorema del valor intermedio y en ese caso, calcule un valor intermedio.

a) $f(x)=x^3$ en $[-1,1]$ b) $g(x)=x^3-1$ en $[0,3]$

c) $h(x)=x^2+4x+4$ en $[0,1]$ d) $k(x)=3x^2-x-1$ en $[-1,1]$

17. Pruebe que las ecuaciones dadas, tiene una raíz en el intervalo que se señala:

a) $x^3+7x^2-3x-5=0$ en $[-3.2,0.1]$

b) $x^5-4x^3+x^2-1=0$ en $[-2.1,1.5]$

c) $x^4-3x^3+x^2-4x+3=0$ en $[-1.3,1.5]$

d) $x\ sen(x)-\frac{1}{2}=0$ en $[-1,2]$

e) $x\cos(x)+\frac{1}{2}=0$ en $[1,3.5]$

Ejercicios opcionales

1. **Hallar el supremo y el ínfimo (si existen) de los siguientes conjuntos. Igualmente encontrar los máximos y mínimos (si existen).**

(i) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ en } \mathbf{Z} \quad \text{y} \quad n \neq 0\right\}$.

(iii) $\{x: x = 0 \text{ ó } x = 1/n \text{ para algún } n \text{ en } \mathbf{N}\}$.

(iv) $\{x: 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ es racional}$

(v) $\{x: x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

(vi) $\{x: x^2 + x - 1 < 0\}$.

(vii) $\{x: x < 0 \quad \text{y} \quad x^2 + x - 1 < 0\}$.

(viii) $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n: n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

2. (a) Supongamos que $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente. Designemos por $-A$ el conjunto de todos los $-x$ con x en A. Demostrar que $-A \neq \emptyset$, que $-A$ está acotado superiormente, y que $-\sup(-A)$ es la cota inferior máxima de A.

(b) Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente, sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A: Demostrar que $B \neq \emptyset$, que B está acotado superiormente, y que B es la cota inferior máxima de A.

Septiembre 2010